

Hamit YAZICI
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği
0254271
Diferansiyel Denklemler
Prof. Dr. Ziya YAPAR

Diferansiyel Denklemler

Bu dersin işlenmesinde çoğunlukla "Belirsiz Integral Hesaplamaları" kullanılacaktır.

Kaynak:

1) Bilgisayar Destekli ve modellemeli Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri

Edwards Penney / Palma Yayıncılık
Geviri: Ömer Akan

2) Advanced Engineering Mathematics
Erwin Kreyszig

Bazı Integral Formülleri

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$3) \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$$

$$4) \int a^{kx} dx = \frac{1}{k \ln a} \cdot a^{kx} + c, \quad (a \neq 1)$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$7) \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$8) \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$9) \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$10) \int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

2

$$11) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$12) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$15) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

Kısmi integral

$$\int f(x) dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^{2x} dx, \quad u = x, \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$= x \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c}}$$

Diferansiyel Denklemleri incelemenin başlıca 3 kuralı vardır.

1) Belirli bir fiziksel olayı hesaplayan diferansiyel denklemi bulmak.

2) Diferansiyel denklemin kesin yada yaklaşık uygun bir çözümünü bulmak

3) Elde edilen çözümleri yada çözümü yorumlamak

Tanım: x, y, z, t, \dots bağımsız değişkenler u, v, w, \dots bağımlı değişkenler olsun. Bağımsız değişkenler ile bağımlı değişkenler ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevleri arasındaki her fonksiyonel bağıntıya difransiyel denklemler denir.

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy \frac{dy}{dx} + y = t, \quad y = y(x)$$

(2. mertebeden 1. dereceden)
Difransiyel denklem

$$2) \frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{d^3 u}{dt^3} \right)^4 + \frac{d^2 u}{dt^2} + u = t, \quad u = u(t)$$

(3. mertebeden 4. dereceden)
Difransiyel denklem

$$3) F(x, y, y'') = 0, \quad y = y(x)$$

(2. mertebeden derecesi belli olmayan)
Difransiyel Denklem

Bu 3 difransiyel denklem fdi (Elementer) difransiyel denklemdir. Biz bu derste bunlarla ilgileneceğiz.

$$4) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = w = w(x, t)$$

(2. mertebeden 1. dereceden)
Difransiyel Denklem

Bu 4. difransiyel denklem ise kısmi Türevli difransiyel denklemdir. Bu derste bu denklemlerle ilgileneceğiz.

4

$F(x, y) = 0$, $y = y(x)$ bir kapalı fonksiyondur.

Difransiyel Denklemlerde önemli olan 2 yapı vardır.

1) **Mertebe**: Bir difransiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevi temsil eden sayı o denklemin mertebesini belirler.

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ mertebeyi temsil eder.

2) **Derece**: Bir difransiyel denklemde en yüksek mertebeden türevli terimin (ifadenin) derecesi (kuvveti) o denklemin derecesini belirler.

$\left(\frac{d^3 u}{dt^3}\right)^4$ Bu difransiyel denklemin derecesidir.

* Herhangi bir düzlemde eğri olur.

$f(x, y, c) = 0$, ($c \in \mathbb{R}$ bir parametre)
 \rightarrow Sonsuz değer alabilir.

\downarrow
 Düzlemde bir parametrelili eğriler ailesini gösterir.

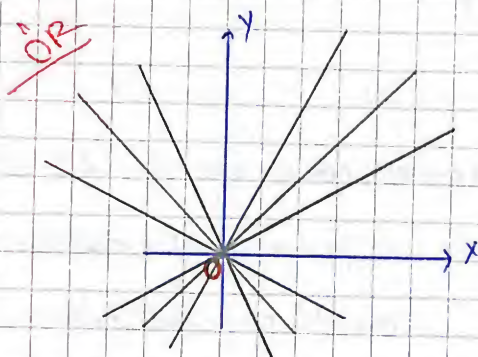
$f(x, y, c) = 0$, $y = y(x)$ (1) ifadesi

$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ (2) ifadesi
 $\frac{dx}{dx} = 1$
 $\frac{dy}{dx} = y'$

2 ifadesi c 'yi içermiyorsa bu denklem söz konusu eğri topluluğunun diferansiyel denklemi olur. Eğer 2 ifadesi c 'yi içeriyorsa 1 ile 2 denklemleri arasında parametre yok edilir. Buradan elde edilen denklem söz konusu ailenin diferansiyel denklemi olur.

ör $y = x + c \rightarrow c$ 'ye verilen her değer için paralel doğrular bulunur

$$y' = 1 = \frac{dy}{dx}$$



$$y = cx$$

$$y' = c \quad y = xy'$$

ör $y = cx + c^2$

$$y' = c \quad y = xy' + (y')^2$$

ör $u = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t, \quad u = u(t)$

$$\frac{du}{dt} = -5C_1 \sin 5t + 5C_2 \cos 5t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -25C_1 \cos 5t - 25C_2 \sin 5t$$

$$= -25 (C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$$

u

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 25u = 0$$

2 parametrelidir.

ÖDEV:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \quad y = y(x)$$

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \quad 3 \text{ parametrelî} \\ \text{çember ailesindendir.}$$

$f(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$ için diferansiyel denklemi

$$F(x, y, y', y'', y''' \dots y^n) = 0$$

Gözüm: $f(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$ eğri ailesi
n parametrelî

$$F(x, y, y', y'', y''' \dots y^n)$$

temsil edilen diferansiyel denklem

$\rightarrow F(\dots)$ tersine genel çözüm

Aykırı Gözüm: Bir diferansiyel denklemin genel çözüm ailesi içerisinde bulunmayan fakat diferansiyel denklemi sağlayan öyle çözümler olabilir ki bu tür çözümlere aykırı çözüm denir.

$y = xy' + (y')^2$ nin genel çözümünü

$$y = cx + c^2 \text{ dir.}$$

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ alalım}$$

$$y' = \frac{x}{2}, \quad y = xy' + (y')^2 \text{ için}$$

$$= \frac{x^2}{4} \stackrel{?}{=} -x \cdot \frac{x}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$\stackrel{?}{=} -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

$$y = -\frac{x^2}{4}, \quad y = xy' + (y')^2 \text{ için aykırı bir çözümdür.}$$

Diferansiyel Denklemler

Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\text{veya } \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Bu tip her denklemin kesin çözümünü olmayabilir. Ama yaklaşık çözümünü olabilir. Biz kesin çözülebilenleri ele alacağız.

- 1) Değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemler
- 2) Homojen diferansiyel denklemler
- 3) P ve Q'nun lineer olması durumundaki diferansiyel denklemler
 - 4) Homojen şekle getirilebilen diferansiyel denklemler
 - 5) Tam diferansiyel denklemler
 - 6) integral çarpanı bulunarak çözülebilen diferansiyel denklemler
 - 7) lineer diferansiyel denklemler
 - 8) Bernoulli diferansiyel denklemler
 - 9) Riccati diferansiyel denklemler

1) Değişkenlerine ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$$\underbrace{f_1(x) \cdot f_2(y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{g_1(x) \cdot g_2(y)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

Çözüm için: $\frac{f_1}{g_1} dx + \frac{g_2}{f_2} dy = 0$

$$\underbrace{\int \frac{f_1}{g_1} dx}_{F(x)} + \underbrace{\int \frac{g_2}{f_2} dy}_{G(y)} = C$$

$$= F(x) + G(y) = C$$

genel çözüm (g.ç.)

ör

Eğer burada x olsa idi denklem değişkenlerine ayrılamazdı.

$$x(y^2-1) dx + e^{-x} y dy = 0$$

$$xe^x dx + \frac{y}{y^2-1} dy = 0$$

$$\int xe^x dx + \int \frac{y}{y^2-1} dy = C$$

$$xe^x - e^x + \frac{1}{2} \ln|y^2-1| = C$$

g.ç.

ör

$$\sin x y(y-1) dx = \cos x dy$$

$$-\tan x dx = \frac{dy}{y(y-1)}$$

$$\int -\tan x dx = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y-1}$$

$$= (a+b)y - a \rightarrow a = -1$$

$$a+b=0 \quad b=1$$

$$-\tan x dx = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1}$$

$$-\ln|\cos x| + C = -\ln|y| + \ln|y-1|$$

g.ç.

Bu sabiti istediğimiz yere yazabiliriz. GIPTA
Yalnız bir sabit olmak şartıyla

$$\frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

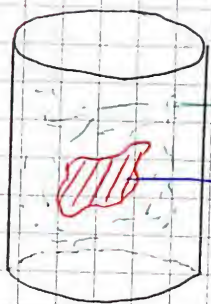
$$\int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} dx = \arcsin y$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \arcsin y, \quad \begin{aligned} e^x - e^{-x} &= t \\ (e^x + e^{-x}) dx &= dt \end{aligned}$$

$$\ln|e^x + e^{-x}| = \arcsin y + c \quad \text{g-4.}$$

Bu gruba giren denklemler için modeller.

ör Newton'un soğuma-ısıtma kanunu



A ortamın sıcaklığı

T cismin sıcaklığı

t → zaman

$$T(t), T, A, k > 0$$

Newton'un bu kanunu sözlerle şöyle ifade edilir.

Bir cismin $T(t)$ sıcaklığının zamana göre değişimi T ve cismi çevreleyen ortamın A sıcaklığı farkla orantılıdır. Yani " k " orantı kat sayısı pozitif sabit olmak üzere.

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - A)$$

Eğer $T > A$ ise $\frac{dT}{dt} < 0$ olur. ve böylece sıcaklık (T)'nin azalan bir fonksiyonudur. Bu durumda cisim soğur. Eğer $T < A$ ise $\frac{dT}{dt} > 0$ olursa bu durumda cisim ısınır.

~~ÖR~~ Torricelli Kanunu

Bu kanun bir tanktaki sıvının V hacminin değişiminin zamana oranının tanktaki sıvının y derinliğinin karekökü ile orantılı olduğunu ifade eder.

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

~~ÖR~~ $P(t)$ sabit β doğum E ölüm oranlarına

(Birim zamanda birey başına doğum ve ölüm oranları) sahip olan nüfustaki (insan, haşere, bakteri) bireylerin sayısıdır.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{(\beta - E)}_k \cdot P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = k P(t)$$

Kısaca $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$

Ödev: 2

$$1) x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$$

$$2) x^2y dy - dx = x^2dx$$

$$3) (x^2-x)y' = y^2+y$$

$$4) xy' + y^2 = 1$$

$$5) (1+y)y' = x^2(1-y)$$

$$6) y' + (1-y^2)\tan x = 0$$

$$7) y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$$

$$8) (1+y)y' = xy$$

Ödev: 2/6'nin çözümü

$$y' + (1-y^2)\tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + (1-y^2)\tan x = 0$$

$$\frac{dy}{1-y^2} + \tan x dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} + \int \tan x dx = 0$$

$$-\int \frac{dy}{y^2-1} + \int \tan x dx = c$$

$$-\frac{1}{2} \ln|y^2-1| - \ln|\cos x| = c$$

g.4.

2) Homojen Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$f(x,y)$ için $\begin{matrix} x \rightarrow tx \\ y \rightarrow ty \end{matrix}$ yazıldığında

$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$ böyle bir durum oluyorsa

$n \in \mathbb{N}$ (Doğal Sayı) f, x , n 'inci dereceden homojen denklem

Buna göre $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ diferansiyel denkleminde P ve Q aynı dereceden homojen ise diferansiyel denkleme 0 dereceden homojen denklem denir.

Gözüm Metodu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \text{ homojen ise } P \text{ ve } Q \text{ denkleminin homojenlik}$$

derecesindeki x ile bağımsız değişkenlerine bölünür. Bu işlem neticesinde $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = k(1, \frac{y}{x})$ ile gösterilir.

$$\frac{y}{x} = u(x), \quad u(x) \text{ bulunacak}$$

$$y = u \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \text{ için}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = k(1, u) \text{ olur.}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \underbrace{k(1, u) \cdot u}_{R(u)}$$

$R(u)$ diyelim

$$\frac{du}{R(u)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{R(u)} = \ln|x| + c$$

$m(u)$ olsun

$$m(u) = \ln|x| + c$$

$$m\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c \quad \text{g.4.}$$

~~ör~~ $f(x,y) = x^2 + y - 1$

Fonksiyon homojen değildir.

~~ör~~ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

2. dereceden homojen

~~ör~~ $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2y$

3. dereceden homojen

29/09/2010

~~ör~~ $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

2. dereceden homojen dif. denklemler

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \cdot x + u &= \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{u}{u^2+1} - u = \frac{u-u^3-u}{u^2+1} = \frac{-u^3}{u^2+1} \\ &= \frac{u^2+1}{u^3} du = -\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{u^2+1}{u^3} du = -\ln|x| + c$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^3} = -\ln|x| + c$$

$$\ln|u| - \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\ln|x| + c$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} = -\ln|x| + c$$

g.4.

1.4

~~OP~~ $y' = \frac{x-y}{x+y}$

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = u \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1-u}{u+1} - u$$

$$= \frac{1-u-u^2-u}{u+1} = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}$$

$$= \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2} \ln|u^2+2u-1| = -\ln|x| + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1\right| = -\ln|x| + c}$$

g.4

~~OP~~ $y' = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = u \quad y' = u'x + u$

$$\frac{du}{dx} x + u = \cos u + u$$

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \ln|x| + c$$

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow -\ln \left| \frac{\tan \frac{y}{2} - 1}{\tan \frac{y}{2} + 1} \right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow -\ln \left| \frac{\tan\left(\frac{y}{2x}\right) - 1}{\tan\left(\frac{y}{2x}\right) + 1} \right| = \ln|x| + c$$

g.4.

$$\textcircled{*} \quad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} + \frac{y}{x}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} + \frac{y}{x} \quad , \quad \frac{y}{x} = u \quad u' = u'x + u$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + u = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} du = \ln|x| + c$$

$$\boxed{u = \sin t}$$

$$du = \cos t dt$$

$$\int \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \cos t dt = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \ln|x| + c$$

devamını getir.

ODEV: 3

$$1) y' = \frac{x^2 - 2y^2}{3xy}$$

$$2) (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$$

$$3) y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$4) y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

$$5) (2x - y)dy = (2y - x)dx$$

$$6) (x^2 - y^2)y' = xy$$

$$7) xy' = y - x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$8) xy' = y + (\sin x)\left(\frac{y}{x}\right) ?$$

$$9) x(x+y)dy = (x^2 + y^2)dx$$

$$10) x^2 y' = 4y^2 + xy - 3x^2$$

$$11) xy' = y \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

$$12) xy' - y = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

$$13) y' = \frac{y}{x+y}$$

$$14) y' = \frac{x}{x-y}$$

$$15) xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

3) P ve Q'nun Lineer Olması Durumundaki Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

Bu özellikte iki durum söz konusudur

1) $a_1b - a, b = 0$ olabilir. Bu durumda pay ve paydağı temsil eden doğrular paraleldir.

$$\text{Yani } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k \quad \text{veya} \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k \quad k \in \mathbb{R}$$

↓

$$\underline{a = k \cdot a_1} \quad \text{icin} \quad \underline{ax+by = k(a_1x+b_1y)}$$

Çözüm için:

$$a_1x + b_1y = u = u(x)$$

$$a_1 + b_1y' = u'$$

$$y' = \frac{u' - a_1}{b_1} \quad \text{ve} \quad y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad \text{du}$$

$$\Rightarrow \frac{u' - a_1}{b_1} = \frac{ku+c}{u+c_1} = u' = \left(b_1 \left(\frac{ku+c}{u+c_1} \right) + a_1 \right) \rightarrow F(u) \text{ diyelim}$$

$$\frac{du}{dx} = F(u) \Rightarrow \frac{du}{F(u)} = dx$$

$$\int \frac{du}{F(u)} = x+c$$

H(u)

$$H(u) = x+c$$

$$\boxed{H(a_1x + b_1y) = x+c}$$

g.ç.

~~OP~~ $y' = \frac{2x+2y-1}{x+y+1}$

$$y' = \frac{2(x+y)-1}{x+y+1}, \quad \begin{aligned} x+y &= u \\ 1+y' &= u' \end{aligned} \quad y' = u' - 1$$

$$\Rightarrow u' - 1 = \frac{2u-1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{u+1} = \frac{2u-1+u+1}{u+1} = \frac{du}{dx} = \frac{3u}{u+1}$$

$$\frac{u+1}{3u} du = dx$$

$$\int \frac{u+1}{3u} du = x + c$$

$$\frac{1}{3} \int du + \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = x + c$$

$$\frac{1}{3} u + \frac{1}{3} \ln|u| = x + c$$

$$\boxed{\frac{1}{3} (x+y) + \frac{1}{3} \ln|x+y| = x + c}$$

g.g.

~~OP~~ $y' = \frac{x-y}{3x-3y+1}$

$$y' = \frac{x-y}{3(x-y)+1}, \quad \begin{aligned} x-y &= u \\ 1-y' &= u' \end{aligned} \quad y' = u' + 1$$

$$1 - u' = \frac{u}{3u+1} \quad u' = 1 - \frac{u}{3u+1}$$

$$= \frac{3u+1-u}{3u+1} = \frac{2u+1}{3u+1} = \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{3u+1}{2u+1} du = dx$$

$$\int \frac{3u+1}{2u+1} du = x+c, \quad \left(\begin{array}{r|l} 3u+1 & 2u+1 \\ -3u+3 & 3 \\ \hline -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\frac{3}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \frac{du}{2u+1} = x+c$$

$$\frac{3}{2} u - \frac{1}{4} \ln|2u+1| = x+c$$

Sor

$$\frac{3}{2} (x-y) - \frac{1}{4} \ln|2(x-y)+1| = x+c$$

9.4.

2) $ab_1 - a_1b \neq 0$ ise (homogen fikle getirilebilen denklemlere)

$$y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad \text{bu durumda}$$

Çözüm için:

$$\left. \begin{array}{l} x = X+h \\ y = Y+k \end{array} \right\} h, k \in \mathbb{R} \quad \text{bulunacaklar dönüşümü uygulanır.}$$

$$\left. \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array} \right\} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

$$y' = \frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

olacak şekilde
h, k bulursa

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} h=m \\ k=n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{R} \quad \text{olsunlar}$$

$$\begin{aligned} x &= X+h & \text{'dan} & & X &= x-h \\ y &= Y+k & & & Y &= y-k \end{aligned}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y} \quad \text{Homojendir.}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a+b\left(\frac{Y}{X}\right)}{a_1+b_1\left(\frac{Y}{X}\right)}, \quad \frac{Y}{X} = u = u(X)$$

Gözüm: $F(X, Y, c) = 0$ olsun

veya $F(X-m, Y-n, c) = 0$ g. 4.

ör $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

$$\begin{aligned} x &= X+h \\ y &= Y+k \end{aligned} \rightarrow y' = \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y+h-k+1}{X+Y+h+k-3}, \quad \begin{cases} h-k+1=0 \\ h+k-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=1 \\ k=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= X+1 & X &= x-1 \\ y &= Y+2 & Y &= y-2 \end{aligned}$$

Homögen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+1} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = u \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1-u}{u+1} - u = \frac{1-u-u^2-u}{u+1}$$

$$= \frac{u^2+2u-1}{u+1} = \frac{(u+1)du}{u^2+2u-1} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2} \ln|u^2+2u-1| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right| = -\ln|x| + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 1\right| = -\ln|x-1| + c}$$

ODEV: 4

$$1) y' = \frac{x+y-1}{2x+2y+3}$$

$$2) y' = \frac{-x+y+1}{x+y+5}$$

$$3) (x+2y)(dx-dy) = dx+dy$$

$$4) y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+2}$$

$$5) y' = \frac{2x-y}{4x-2y-1}$$

$$6) (2x-4y+5)y' + x+2y+3 = 0.$$

$$7) (x-y+1)dx + (2x+y-2)dy = 0$$

30/09/2010

5) Tam Diferansiyel Denklemler

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Teorem: Böyle bir denklemin tam olabilmesi için gerekli ve yeter şart,

$$P_y = Q_x \text{ olması lazımdır.}$$

~~ör~~ $\underbrace{(y - \cos x)}_P dx + \underbrace{(x + e^y)}_Q dy = 0$

$$P_y = 1 = Q_x \quad (\text{Denklemler Tam})$$

~~ör~~ $\underbrace{(y^2 + \sin x)}_P dx + \underbrace{(x^2 - e^y)}_Q dy = 0$

$$P_y = 2y \neq 2x = Q_x \quad (\text{Denklemler Tam Değil})$$

~~ör~~ $\underbrace{(y + \sqrt{x})}_P dx - \underbrace{(\cos y - x)}_Q dy = 0$
 $Q = -(x - \cos y)$

$$P_y = 1 = Q_x \quad (\text{Denklemler Tam})$$

24

ör $(y-y)dx + (-x+y)dy = 0$ (Tam ve Homojen Dif. Denklem)

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ Tam olsun.

$u(x,y) = c \rightarrow d(u) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = d(c) = 0$ (Tam Dif. Denklem)

Gözlem için: $u(x,y) = \int^x P(x,y) dx + h(y)$
 $F(x,y)$ alalım

$u(x,y) = F(x,y) + h(y)$

$u_y = F_y + h'(y) = Q$

$h(y) = \dots$ bulunur.

$\Rightarrow u(x,y) = \boxed{F(x,y) + \dots = c}$ g.4.

ör $(y+xe^x)dx + (x+\sqrt{y})dy = 0$ (Denklem tamdır)

$u(x,y) = \int^x (y+xe^x) dx + h(y)$

$u(x,y) = \int^x (y+xe^x) dx + h(y)$

$u = xy + xe^x - e^x + h(y)$

$u_y = x + h'(y) = x + \sqrt{y} = Q$

$h'(y) = \sqrt{y} = h(y) = \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}}$ integral

$u = xy + xe^x - e^x + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c$ g.4.

$\int xe^x dx$ Kısmi integralden çözülür.

Ama e^x için geçerli bir kısa yol.

$xe^x - e^x$ önce kendisi - sonra türevi

ör $(y + \tan x) dx + (x + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}) dy = 0$ (Denklemler tamdır)

$$u = \int (y + \tan x) dx + h(y)$$

$$u = xy - \ln|\cos x| + h(y)$$

$$u_y = x + h'(y) = x + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = 0$$

$$h'(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \rightarrow h(y) = \int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} dy, \quad y^2-1 = t$$

$$\frac{dh}{dy}$$

$$y dt = \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{t} = \sqrt{y^2-1}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = xy - \ln|\cos x| + \sqrt{y^2-1} = C \quad 9-4$$

$$h'(y) = 0 \text{ ise}$$

$$h(y) = C$$

$$u(x, y) = F(x, y) + C = C$$

$$F(x, y) = C - C = C$$

ör $(x-y) dx + (y-x) dy = 0$ (Tam ve homojen Dif. Denklemler)

Tam Durumda Çözüm:

$$u = \int (x-y) dx + h(y)$$

$$u = \frac{x^2}{2} - xy + h(y)$$

$$u_y = -x + h'(y) = y - x = 0$$

26

$$h'(y) = y \rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$I(x, y) = \boxed{\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = C} \quad \text{g.4.}$$

Homogen Durumda çözüm

$$(x-y)dx = -(x-y)dy$$

$$= (x-y)dy \rightarrow y' = 1$$

$$\boxed{y = x + C} \quad \text{g.4.}$$

~~OP~~ $(y+x)dx + (x-2y)dy = 0$ (Tam ve Homogen)
Dif. Denklemleri

Tam için çözüm:

$$u = \int (y+x)dx + h(y)$$

$$u = xy + \frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$u_y = x + h'(y) = x - 2y = 0$$

$$h(y) = -y^2$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \boxed{xy + \frac{x^2}{2} - y^2 = C} \quad \text{g.4.}$$

Homogen için çözüm:

$$y' = -\frac{x+y}{x-2y} = \frac{x+y}{-x+2y} \quad \text{Homogen}$$

$$= \frac{1 + \frac{y}{x}}{-1 + 2\frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = u \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1+u}{-1+2u}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{u+1}{2u-1} - u$$

$$= \frac{u+1-2u^2+u}{2u-1}$$

$$= \frac{2u^2+2u+1}{2u-1} = -\frac{2u-2u-1}{2u-1}$$

$$\frac{2u-1}{2u^2-2u-1} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2u-1}{2u^2-2u-1} du = -\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2u-1}{u^2-u} du = -\ln|x| + C$$

$$\frac{1}{2} \ln|u^2-u| - \frac{1}{2} = -\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \right| = -\ln|x| + C}$$

6) integral çarpanı Bulunarak Çözülebilir Diferansiyel Denklemler.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (\text{Tam olmasın})$$

$\lambda(x)$, $\lambda(y)$, $\lambda(x \cdot y)$, $\lambda(\frac{y}{x})$ yapısında (şeklinde) ifadelerle (fonksiyonlarla) çarpabiliriz ki denklem bu durumda tam olur. İşte bu durumda olan fonksiyonlara integral çarpanı denir.

1) Eğer $\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(y)$ şeklinde sadece y 'in fonksiyonu ise bu oran burardan işlem

$$\lambda(x) = \lambda = e^{\int f(y) dy}$$
 ile şekilde

bulacağımız ifade ile denklemi karşılasak denklem tam olur.

~~ör~~ $\underbrace{(1-xy)}_P dx + \underbrace{(xy-x^2)}_Q dy = 0$

$$P_y = -x \neq y - 2x = Q_x \quad (\text{Denklem Tam Değil})$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-x - y + 2x}{xy - x^2} = \frac{x - y}{-x(x-y)} = -\frac{1}{x}$$

$$f(y) \rightarrow \lambda(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx}$$

$$= e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \text{ için}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x} - y\right)}_P dx + \underbrace{(y - x)}_Q dy = 0$$

$$P_y = -1 = Q_x \quad (\text{Denklem Tam})$$

$$u = \int \left(\frac{1}{x} - y\right) dx + h(y)$$

$$u = \ln|x| - xy + h(y)$$

$$u_y = -x + h'(y) = y - x = Q$$

$$h'(y) = y \rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$u(x, y) = \ln|x| - xy + \frac{y^2}{2} = c \quad \text{g:4.}$$

$$\cancel{OP} \quad \underbrace{(3x^2 + y^2)}_P dx - \underbrace{2xy}_Q dy = 0$$

(Homogen Dif. Denklem)

$$P_y = 2y \neq -2y = Q_x \quad \text{(Denklem Tam Degil)}$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x} \rightarrow \lambda(x)$$

$$= e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(3 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2 \frac{y}{x} dy = 0 \quad \text{(Denklem Tam)}$$

$$u = \int \left(3 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx + h(y)$$

$$u = 3x - \frac{y^2}{x} + h(y)$$

$$u_y = -\frac{2y}{x} + h'(y) = -2 \frac{y}{x} = 0$$

$$h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = c$$

$$\boxed{3x - \frac{y^2}{x} = c}$$

g.c

2) Eğer $\frac{Py+Qx}{-P} = g(y)$ ise, Bu durumda

$d(y) = d = e^{\int g(y)dy}$ şeklinde bir ifade ile denklem uyarlanırsa denklem tam olur.

~~ÖR~~ $x^2 y dx + (x^3 + 2y^3) dy = 0$ (Denklem Tam Değil)
Ama Homojen

$$\frac{Py-Qx}{-P} = \frac{x^2 - 3x^2}{-x^2 y} = \frac{2}{y} \rightarrow g(y)$$

$$d = d(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = y^2 \text{ için}$$

$$x^2 y^3 dx + (x^3 y^2 + 2y^5) dy = 0 \quad \underline{\text{(Denklem Tamdır)}}$$

$$u = \int x^2 y^3 dx + h(y)$$

$$u = \frac{x^3 y^3}{3} + h(y)$$

$$u_y = x^3 y^2 + h'(y) = x^3 y^2 + 2y^5 = 0$$

$$h'(y) = 2y^5 \rightarrow h(y) = \frac{y^6}{3}$$

$$\boxed{\frac{y^3 x^3}{3} + \frac{y^6}{3} = C} \quad \text{g.4.}$$

ödev 5:

Aşağıdaki denklemlerin tam olanlarını tam olmayıpta tam sekle getirilebilenleri veya başka tiplere uyuyorsa o duruma göre çözümler.

- 1) $(x^2 - y^2)dx - 2xy dy = 0$
- 2) $(x^2 + 2xy - y^2)dx = (x^2 - 2xy - y^2)dy$
- 3) $(2xy + e^x)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
- 4) $(y + 3x)dx + xdy = 0$
- 5) $ye^x dx + e^x dy = 0$
- 6) $(5xy^4 + x)dx + (2 + 3y^2 - 10x^2y^3)dy = 0$
- 7) $xy^3 dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$
- 8) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$
- 9) $(xy^3 - 1)dx + xy^2 dy = 0$
- 10) $-xy' + y + \ln x = 0$
- 11) $(x^2y + y^2)dx - x^3 dy = 0$
- 12) $2y dx + (1 - \ln y - 2x)dy = 0$
- 13) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4 e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
- 14) $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2(y^3 + x^2y + x)dy = 0$
- 15) $(2y - 3x)dx + xdy = 0$
- 16) $(x - y^2)dx + 2xy dy = 0$
- 17) $y dx - x dy + \ln x dx = 0$

7) Linear Diferansiyel Denklemler

Aşağı böl

genel birer

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

$$y' + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$$

$$\underbrace{y'}_{P(x)} + \underbrace{\frac{B}{A}}_{Q(x)} y = -\underbrace{\frac{C}{A}}_{R(x)}$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Çözüm için: $\lambda(x) = e^{\int P(x) dx}$

$$= \lambda y = \int \lambda Q(x) dx + c$$

g.4.

06/10/2019

ÖDEV 6:

1) $2y^2 dx + (2x + 3xy) dy = 0$

2) $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$

3) $(3x^2y^4 + y) dx + (2x + 4y^2) dy = 0$

4) $(2x + \tan y) dx + (x - x^2 \tan y) dy = 0$

5) $(y^2(x+1) + y) dx + (2xy + 1) dy = 0$

6) $(2xy^2 + y) dx + (2y^3 - x) dy = 0$

7) $(2y^2 + 2x + 1) dx + 2y dy = 0$

8) $2x dx + (6ye^y - x^2) dy = 0$

9) $3x^2y dx + (3x^3 + 5y^2) dy = 0$

10) $(3x^3y + 2xy^{-2}) dx + (3x^3 + 2y^{-1}) dy = 0$

Lineer Diferansiyel Denklemlerin Devamı

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Çözüm için:

$$\lambda = e^{\int p(x) dx} = \lambda(x)$$

$$\lambda y = \int \lambda \cdot q(x) dx + C$$

g.c.

34

or

$$xy' - y - y^3 = 0$$

$$y' - \frac{1}{x}y = y^3$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x} x^2 dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$

g.g.

or

$$-xy' + y = x^3 e^x$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x} x^2 e^x dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x e^x dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x e^x - e^x + c$$

g.g.

or

$$\cos x y' + 2y \sin x = \cos^3 x$$

$$y' + 2y \tan x = \cos^2 x$$

$$\lambda = e^{\int 2 \tan x dx} = e^{-2 \ln \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} y = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cos^2 x dx + c$$

$$\frac{y}{\cos^2 x} = x + c$$

g.g.

ÖDEV 7:

1) $xy' - 4y = x^5$

2) $y' + \frac{y}{x} = x$

3) $xy' - 1(x+1)y = x^2 - x^3$

4) $xy' - y = x^3 + 1$

5) $(1-x^2)y' - y = 1-y^2$

6) $x^2y' + y = 3x$

7) $(x^2-1)y' - xy = x^2$

8) $(1+x^2)y' + 2xy = \tan x$

9) $xy' + 2y - \sin x = 0$

10) $xy' - y = \frac{x^2(1-\cos x)}{\sin x + \cos x}$

11) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x} + \sin x$

12) $xy' - y = \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$

8) Bernoulli Diferansiyel Denklemleri

$$A(x)y' + B(x)y + C(x)y^n = 0, (n \in \mathbb{Q})$$

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Çözüm için: Denklemin 2. yan y^n ile bölünür.

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x), \quad u(x) = u \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

$$u' = (1-n)y' y^{1-n-1}$$

$$u' = (1-n) \frac{y'}{y^n}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$$

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x) \quad (\text{Linear})$$

$$\hookrightarrow \text{Gözölür} \Rightarrow F(x, u, c) = 0$$

$$F(x, y^{1-n}, c) = 0 \quad \text{g.4.}$$

$$\text{ÖB} \quad -y' + xy = y^3 e^{-x^2}$$

$$\frac{-y'}{y^3} + x \frac{1}{y^2} = e^{-x^2}, \quad u = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

$$u' = -2y' y^{-3}$$

$$= -2 \frac{y'}{y^3}$$

$$-\frac{y'}{y^3} = \frac{u'}{2}$$

$$\frac{u'}{2} + xu = e^{-x^2}$$

$$u' + 2xu = 2e^{-x^2} \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{\int 2x dx} = e^{x^2} \quad e^{x^2} \cdot u = \frac{e^{x^2}}{y^2} = 2 \int e^{x^2} \cdot e^{x^2} dx + c$$

$$\frac{e^{x^2}}{y^2} = 2x + c \quad \text{g.4.}$$

Q8 $xy' + y = y^2 \ln x$

$$x \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x, \quad u = \frac{1}{y}$$

$$u' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$\frac{y'}{y^2} = -u'$$

$$-xu' + u = \ln x$$

$$u' - \frac{1}{x} u = -\frac{\ln x}{x} \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} u = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -\int -\ln x \frac{dx}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{xy} = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right) + c$$

$$\boxed{\frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c} \quad \text{g-4}$$

Q9 $y' \cos x + y \sin x + y^3 = 0$

$$\frac{y'}{y^3} \cos x + \frac{1}{y^2} \sin x = -1, \quad u = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

$$u' = -2y' y^{-3}$$

$$u' - 2 \frac{y'}{y^3} \rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{u'}{2}$$

$$-\frac{u'}{2} \cos x + u \sin x = -1$$

$$u' - 2 \tan x u = \frac{2}{\cos x} \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{\int -2 \tan x dx} = e^{2 \ln \cos x} = \cos^2 x \Rightarrow u \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{y^2} =$$

$$= 2 \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos x} dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{y^2} = 2 \sin x + C \quad 9.4$$

OR

$$y' + 2y = 2xy^{3/2}$$

$$\frac{y'}{y^{3/2}} + 2 \left(\frac{1}{y^{1/2}} \right) = 2x, \quad u = \frac{1}{y^{1/2}} = y^{-1/2}$$

$$u' = -\frac{1}{2} y' y^{-3/2}$$

$$u' = -\frac{1}{2} \frac{y'}{y^{3/2}}$$

$$\frac{y'}{y^{3/2}} = -2u'$$

$$\Rightarrow 2u' + 2u = 2x$$

$$\Rightarrow u' + u = x \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^{-x} u = \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = \int x e^{-x} dx + C, \quad u = x$$

$$du = dx$$

$$dy = e^{-x} dx$$

$$y = -e^x$$

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = -(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) + c$$

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = x e^{-x} + e^{-x} + c$$

g.4.

ÖDEV 8:

$$1) 2y' + y = y^3(x-1)$$

$$2) x^3 y' = 2x^2 y + y^3$$

$$3) x y' + y = x y^3$$

$$4) y' + y = \sqrt{y}$$

$$5) 3x y' - 2y = x y^4$$

$$6) 2x y' - y = 2x^3 y^5$$

g) Riccati Diferansiyel Denklemleri

$$A(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x) = 0$$

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

Gözüm için: $y_1 = y_1(x)$ özel gözüm olsun

$$y = y_1 - \frac{1}{u}, \quad u = u(x)$$

$$y' = \dots$$

$$y^2 = \dots$$

$$\text{ve } y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

yerine yazılacak denklem düzenlenirse karşımıza bir lineer denklem çıkar. Buda çözülür.

Gözüm $F(x, u, c) = 0$ arasındadır. $F(x, \frac{1}{y-y_1}, c) = 0$

DE

$$2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$$

$y_1 = x$ özel çözüm

$$y = x + \frac{1}{u}$$

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

$$y^2 = x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 \left(1 - \frac{u'}{u^2}\right) = (x-1) \left(x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2} - x^2\right) + 2x \left(x + \frac{1}{u}\right)$$

$$= 2x^2 \cancel{1} - 2x^2 \frac{u'}{u^2} = 2x^2 u + x - 2x \cancel{u} - 1 + 2x \cancel{u^2} + 2x \cancel{u}$$

$$= -2x^2 u' - 2x^2 u = x - 1$$

$$u' + u = -\frac{1}{2} \frac{(x-1)}{x^2}$$

$$u' + u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{(Linear)}$$

$$\lambda = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^x u = \frac{1}{2} \left(\int \frac{e^x dx}{x^2} - \int \frac{e^x dx}{x} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x dx}{x} - \int \frac{e^x dx}{x} \right) + C$$

$$\Rightarrow \frac{e^x}{y-x} = -\frac{e^x}{2x} + C \quad \text{g.c.}$$

$$\int \frac{e^{kx}}{x^n} dx, \int \frac{\sin x}{x^n} \cos x dx$$

Elementer Alineamaz

$$u = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x}$$

ÖDEV 9.

$$y' = y^2 + y \sin 2x - 2 \sin^2 x + 1, \quad y = \tan x$$

- $p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ Denklem grubunda olupta gördüğümüz tiplere uymayan fakat bir değişken dönüşümü veya değişkenler arasında rol değişikliği yaparak çözebilme metodu -

Bu durumda denklemde öyle bir yere öyle bir yeni bağımlı değişken denir ki denklem bilinen tiplere uyar. veya değişkenler arasında rol değişikliği yaparak denklem gördüğümüz tiplere uyar. Bu durumda çözümü buluruz.

ÖR

$$dx + (x+y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+y}, \quad x+y=u$$

$$1+y' = u' \rightarrow y' = u' - 1$$

$$\begin{array}{r|l} u & u-1 \\ \hline -u+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$u' - 1 = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$$

$$\frac{u du}{u-1} = dx$$

$$\int \frac{u du}{u-1} = x + c$$

$$u + \ln|u-1| = x + c$$

$$\boxed{x + y + \ln|x+y-1| = x + c}$$

g. 4

42

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{dx}{dy} = -(x+y)$$

$$\frac{dx}{dy} + x = -y \quad (\text{linear}), \quad y' + p(x)y = q(x) \leftrightarrow x' + p_1(y)x = q_1(y) \quad (\text{linear})$$

$$x = x(y)$$

$$\lambda = e^{\int dy} = e^y$$

$$e^y \cdot x = -\int y e^y dy + C$$

$$e^y \cdot x = -(y e^y - e^y) + C \quad \begin{matrix} 2. \\ g.4. \end{matrix}$$

1. ile 2. g.4.'ler farklı
görünse de aynı eğri
ailesine aittirler.

OR $y' \cos y + \frac{\sin y}{x} = 1$

$u = \sin y$
 $u' = y' \cos y$

$u' + \frac{u}{x} = 1$ (Linear)

$\Rightarrow \lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$

$xu = x \sin y = \int x dx + c$

$x \sin y = \frac{x^2}{2} + c$ g.f.

OR $y' + \frac{2}{x}(1+y) = x\sqrt{1+y}$

$u = 1+y$
 $u' = y'$

$u' + \frac{2}{x}u = x\sqrt{u}$ (Bernoulli)

$\frac{u'}{\sqrt{u}} + \frac{2}{x}\sqrt{u} = x$, $v = \sqrt{u}$

$v' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} = 2v'$

$2v' + \frac{2}{x}v = x$

$v' + \frac{1}{x}v = \frac{x}{2}$ (Linear)

$\lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

$xv = x\sqrt{u} = x\sqrt{1+y} = \frac{1}{2} \int x x dx + c$

$x\sqrt{1+y} = \frac{x^3}{6} + c$ g.f.

44

~~Ör~~ $\sqrt{x} \sin^2(x^2 - y) = 2x - y'$

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 - y \\ u' = 2x - y' \end{array} \right\} \sqrt{x} \sin^2 u = u = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = \sqrt{x} dx$$

$$-\cotanu = -\cotan(x^2 - y) = \frac{2}{3} x^{3/2} + c \quad \text{g. 4.}$$

ÖDEV 10:

1) $y' = (x + 4y - 1)^2$

2) $(1 + y') \cos(x + y) e^{x+y} = 1$

3) $(x - y') \ln\left(\frac{x^2}{2} - y\right) = \left(\frac{x^2}{2} - y\right) x e^x$

4) $y' = (y - 4x)^2$

5) $\tan^2(x + y) dx - dy = 0$

Verilen ilk şartlar altında çözüm Bulma veya
Başlangıç şartları verildiğinde çözüm Arama

~~Ör~~ $xy' = x e^{\frac{y}{x}} + y, \quad y(1) = 0 \quad (\text{Bunun anlamı: } x=1 \text{ için } y=0 \text{ olan})$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = u \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = e^u + u$$

$$\frac{du}{dx} x = e^u \rightarrow e^{-u} du = \frac{dx}{x}$$

$$= -e^{-u} = \ln|x| + c$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$$

 $y(1) = 0 \text{ olan}$

$$\rightarrow \frac{-e^{-\frac{0}{1}}}{-1} = \frac{\ln|1|}{0} + c$$

 $c = -1$

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| - 1$$

OR $\frac{dw}{dt} + w \tan t = \cos^2 t$, (Linear), $w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\lambda = e^{\int \tan t dt}$$

$$= e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{w}{\cos t} = \int \frac{1}{\cos t} \cos^2 t dt + c$$

$$\boxed{\frac{w}{\cos t} = \sin t + c} \quad \text{g.c.}$$

$$w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ olan}$$

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} + c$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + c$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = c$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = c}$$

$$\boxed{\frac{w}{\cos t} = \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

OR $y' + \frac{1}{2x} y = \frac{x}{y^3}$, $y(1) = 2$

$$y' y^3 + \frac{1}{2x} y^4 = x, \quad u = y^4$$

$$u' = 4y^3 y' \quad y' y^3 = \frac{u'}{4}$$

$$\frac{u'}{4} + \frac{u}{2x} = x$$

$$u' + \frac{2}{x} u = 4x \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln x} = x^2$$

$$= x^2 u = x^2 y^4 = 4 \int x \cdot x^2 dx + c$$

$$\boxed{x^2 y^4 = y^4 + c} \quad \text{g.c.} \quad y(1) = 2 \text{ olan}$$

46

$$1 \cdot 16 = 1 + c$$

$$c = 15$$

$$x^2 y^4 = x^4 + 15$$

ÖDEV 11:

$$1) y' = \frac{x-y}{x+y}, y(1)=2$$

$$2) y' = \frac{2xy-y^2}{2xy-x^2}, y(1)=2$$

$$3) y' = \frac{y^2+xy}{x^2}, y(1)=1$$

$$4) (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, y(0)=1$$

$$5) y' \tan y - \tan x = 0, y(0)=0$$

$$6) y' - 2y = 3e^{2x}, y(0)=0$$

$$7) xy' - 3y = x^3, y(1)=10$$

$$8) y' + 3y = 2xe^{-3x}, y(0)=1$$

$$9) xy' + 2y = 3x, y(1)=5$$

$$10) xy' + 5y = 7x^2, y(2)=5$$

$$11) y' + y = e^x, y(0)=1$$

$$12) (x^2+1)y' + 2xy = 1, y(0)=1$$

$$13) y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, y(\pi)=0$$

Hızla Orantılı Direnç (Linear Dif. Denklemler için)

Bazı durumlarda başka kuvvetlerin bulunmadığı varsayılarak durmaya hazırlanan bir araba gibi hareket eden cismin karşılaştığı direnç cismin hızı ile orantılıdır. Cisim ne kadar yavaş ilerlerse ileri doğru gidişi o kadar az engellenir. Bunu cismi bir koordinat ekseninde hareket

eden ve bir "t" anındaki konumu "s" ve hızı "v" olan bir m kütlesi şeklinde düşünerek matematiksel olarak ifade edebiliriz. Harekete karşı direnen kuvvet $F = \text{kütle} \times \text{ivme (Newton konumu)} = m \left(\frac{dv}{dt} \right)$ 'dir.

$$F = m \frac{dv}{dt} = -kv, (k > 0)$$

①

Bu durumu söz konusu ederek kuvvetin hızla orantılı olarak azaldığını söyleyebiliriz. ① ifadesini düzenlersek;

$$m \frac{dv}{dt} + kv = 0 \text{ olur. (Özel lineer Denklemler, Değişkenlerine Ayrılabilen) Dif. Denklemler}$$

Cismin $t=0$, anındaki hızına, $v(0)=v_0$, diyelim ve bu şart altında çözüm $v=v(t)$ arayalım.

$$m \frac{dv}{dt} + kv = 0, v(0)=0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln v(t) = -\frac{k}{m} t + c$$

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m} t + c} = e^c \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$v(t) = e^c \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

$v(0)=v_0$ olan

g.f.

$$\Rightarrow v(0)=v_0 = e^c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0}$$

$$v(0) = e^c$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

Buradan m kütlesi büyük bir değer ise hızı sıfır'a ulaşmasının uzun süreceğini görürüz. Bu denklemi tekrar çözersek s 'yi yani yol denklemini t 'nin fonksiyonu olarak buluruz. Cismin durmaya hazırlandığını ve üzerine etki eden tek kuvvetin sürati ile orantılı bir direnç olduğunu varsayalım. Cisim durana kadar ne kadar yol alır.

Bunun için;

$s(t)$ de $s(0)=0$ durumunda çözümü buldım.

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow ds = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt$$

$$s(t) = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + C \quad \text{g.4.}$$

$s(0)=0$ olan ;

$$s(0)=0 = -\frac{m}{k} v_0 \cdot e^0 + C$$

$$C = \frac{m v_0}{k}$$

$$s(t) = \frac{m v_0}{k} - \frac{m v_0}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$s(t) = \frac{m v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

cismin ne kadar uzakta duracağını bulmak için $s(t)$ 'nin $t \rightarrow \infty$ 'a gidiyor iken limit almalıyız gerekir. $-\frac{k}{m} < 0$ olduğu için $t \rightarrow \infty$ 'a gidiyor iken $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$ 'a yaklaşır. Yani;

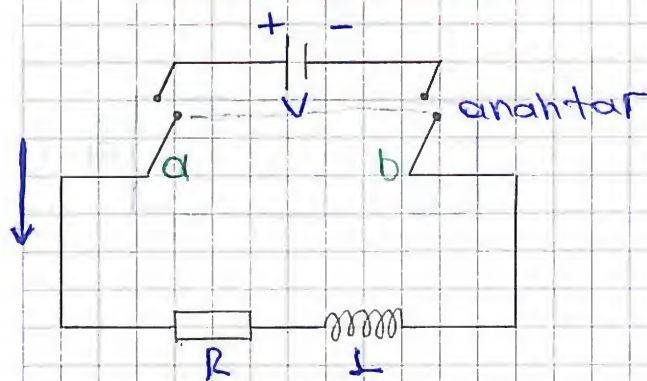
$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{mV_0}{k} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$= \frac{mV_0}{k} \text{ bulunur. Yani alınan mesafe } = \frac{mV_0}{k} \text{ olur.}$$

Zamanı sadece matematik düşünceyle sonsuza uzatabiliriz. $\frac{V_0 m}{k}$ sayısı sadece bir üst sınırdır.

m büyükse cismi durdurmak için çok fazla enerji gerekir.

RL Devreleri



Bu diyagram toplam direnci sabit R ohm ve sarım olarak gösterilen öz induktansı sabit L henry olan bir elektrik devresidir. a ve b uçları sabit V voltluk bir elektrik kaynağını birleştirecek şekilde kapatılan bir anahtar böyle bir devre için $V = IR$ (ohm kanunu) bunu değiştirecek

50

bu durumun değiştirilmiş hali olarak bu devre için şu geçerlidir.

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + IR = V \quad (\text{linear}) \quad (\text{Elektrik devrelerinde Ana dif. denklemlerinden biridir})$$

I = Akım şiddeti (Akım)

t = saniye (zaman)

Bu denklemi gözerek anahtar kapandıktan sonra akımın nasıl akacağını bulabiliriz. Bu devre $t=0$ anında kapatılsın. Akım zamanın fonksiyonu olarak nasıl olacaktır, bakalım. Dolayısıyla bu denklemi gözlememiz gerekecek gözelim.

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V}{L}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L} t}$$

$$e^{\frac{R}{L} t} \cdot I = \frac{V}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} dt + c$$

$$= \frac{V}{L} \cdot \frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} t} + c \Rightarrow I = \frac{V}{R} + c \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad \text{g.4.}$$

$I(0) = 0$ olan

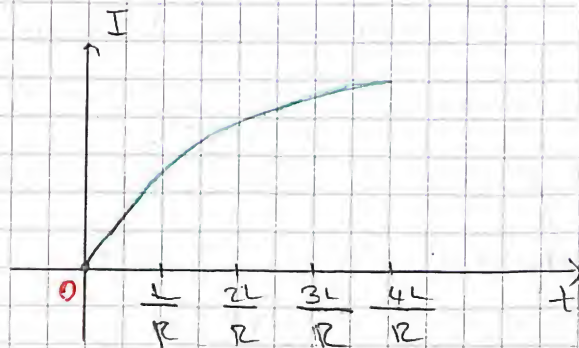
$$I(0) = 0 \Rightarrow \frac{V}{R} + c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0$$

$$c = -\frac{V}{R}$$

$$I(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

veya

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$$



13/10/2019

$F(x, y, y', y'') = 0 \xrightarrow{\text{Gözüm}} f(x, y, c_1, c_2) = 0$ şeklindeki
Denklemlerin 1. mertebeden Denklemlere indirgenmesi

1) y' yi içermeyen Denklemler:

$F(x, y', y'') = 0$ Denklemin Genel Şekli)

Bu durumdaki denklemlerde

$$y' = p = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

$$F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0 \rightarrow \dots \text{ (Burada gözülür)}$$

$$\text{Gözüm} + (x, y, c_1, c_2) = 0 \text{ olur.}$$

ÖR

$$x y'' - y' = x^3$$

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow x \frac{dp}{dx} - p = x^3$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = x^2 \text{ (Linear)}$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} p = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \int \frac{1}{x} \cdot x^2 dx + C_1$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$dy = \left(\frac{x^3}{2} + C_1 x \right) dx$$

$$y = \frac{x^4}{8} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2$$

g.ç.

~~OP~~ $y'' = (x + y')^2$

$$\left. \begin{array}{l} y' = p \\ y'' = \frac{dp}{dx} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dp}{dx} = (x+p)^2, \quad x+p=u$$

$$1 + \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$$

Pve B'nun Lineer
Olma durumu

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{u^2 + 1} = dx$$

$$\arctan u = x + c_1$$

$$\arctan(x+p) = x + c_1$$

$$\arctan\left(x + \frac{dy}{dx}\right) = x + c_1$$

$$x + \frac{dy}{dx} = \tan(x + c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x + c_1) - x$$

$$dy = (\tan(x + c_1) - x) dx$$

$$y = \int \tan(x + c_1) dx - \int x dx$$

$$y = -\ln |\cos(x + c_1)| - \frac{x^2}{2} + c_2$$

9.4

OR

$$y'' + (y')^2 = 0$$

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -p^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = -dx$$

$$-\frac{1}{p} = -x + c_1$$

$$p = \frac{1}{x - c_1} = \frac{dy}{dx}$$

↓

$$\frac{dx}{x - c_1} = dy$$

$$y = \ln|x - c_1| + c_2$$

g.c.

OR

$$x y'' = y'$$

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$x \frac{dp}{dx} = p$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1$$

$$p = c_1 x = \frac{dy}{dx}$$

$$c_1 x dx = dy$$

$$y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$$

g.c.

veya

$$xy'' = y'$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

$$\ln y' = \ln x + \ln c_1$$

$$y' = c_2 x = \frac{dy}{dx}$$

$$y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \quad \text{g.g.}$$

2) $F(x, y, y', y'') = 0$ x'i içermemesi

$F(y, y', y'') = 0$ denklemini ele alalım.

Bu tür denklemlerde

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad p$$

$$y'' = p \frac{dp}{dy}$$

ör

$$y'' = 2yy'$$

$$y' = p$$

$$y'' = p \frac{dp}{dy}$$

$$p \frac{dp}{dy} = 2yp, \quad (p \neq 0)$$

$$dp = 2y dy$$

$$p = y^2 + c_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y^2 + c_1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + c_1} = \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2 \quad \text{g.c.}$$

veya

$$y'' = 2yy'$$

$$y' = y^2 + c_1 = p$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1$$

$$\frac{dy}{y^2 + c_1} = c_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2 \quad \text{g.c.}$$

OR

$$yy'' = (y')^2$$

$$\begin{aligned} y' &= p \\ y'' &= p \frac{dp}{dy} \end{aligned}$$

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2$$

$$y \frac{dp}{dy} = p$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = \ln y + \ln c_1$$

$$p = \frac{dy}{dx} = c_1 y$$

$$\frac{dy}{c_1 y} = dx$$

$$\frac{1}{c_1} \ln |c_1 y| = x + c_2 \quad \text{g.c.}$$

$$\ln p = \ln c_1 + \ln y$$

$$p = c_1 y$$

OP

$$\left. \begin{aligned} yy'' + (y')^2 &= yy' \\ y' &= p \\ y'' &= p \frac{dp}{dy} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} yp \frac{dp}{dy} + p^2 &= yp \\ y \frac{dp}{dy} + p &= y \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y} p = 1 \text{ (Linear)}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

$$\Rightarrow yp = y \frac{dy}{dx} = \int y dy + C_1$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} + \frac{C_1}{y} = \frac{y^2 + 2C_1}{2y}$$

$$\rightarrow \frac{2y dy}{y^2 + 2C_1} = dx$$

$$\boxed{\ln|y^2 + 2C_1| = x + C_2} \quad \text{g.c.}$$

OP

$$\left. \begin{aligned} y'' &= 2y(y')^3 \\ y' &= p \\ y'' &= p \frac{dp}{dy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} p \frac{dp}{dy} &= 2yp^3 \\ \frac{dp}{dy} &= 2yp^2 \\ \frac{dp}{p^2} &= 2y dy \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{p} = y^2 + C_1$$

$$p = -\frac{1}{y^2 + C_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$(y^2 + C_1) dy = -dx$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2 = -x} \quad \text{g.c.}$$

Yüksek Mertebeden 1. Dereceden Dif. Denklemler

A)

a) Yüksek mertebeden sabit katsayılı Homojen (Eşitliğin 2. tarafı sıfır) Dif. Denklemler.

b) Yüksek mertebeden sabit katsayılı Homojen olmayan (Eşitliğin 2. tarafı sıfır değil) Dif. Denklemler.

B)

a) Yüksek mertebeden değişken katsayılı Homojen Dif. Denklemler.

b) Yüksek mertebeden değişken katsayılı Homojen olmayan Dif. Denklemler.

A)

a) Genel yapısı şöyledir;

$$\underline{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

$(a_i \leq n, a_i \in \mathbb{R})$

b) Genel yapısı şöyledir;

$$\underline{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$$

B)

a) Genel yapısı şöyledir;

$$\underline{a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_3(x) y''' + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0}$$

$a_i(x)$ 'ler x 'in fonksiyonları $(ax+b, ax^2+bx+c, \sin x, \cos x, \ln x, \tan x, \dots)$

b) Genel yapısı şöyledir;

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Fonksiyonlarda Lineer Bağımlılık Lineer Bağımsızlık

$$y_1 = y_1(x),$$

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonları verilsin

$$W = W[y_1, y_2, y_3, \dots, y_n] = 1$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

→ determinantına WRONSKI
determinantı denir.

Eğer;

1) $W=0$ ise y_i fonksiyonları lineer bağımlıdır.

2) $W \neq 0$ ise y_i fonksiyonları lineer bağımsızdır.

~~ör~~ $W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$$2(1-0x) = 2 \neq 0 \quad (\text{lineer bağımsız})$$

ör $w\{x, -3x\} = \begin{vmatrix} x & -3x \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3x + 3x = 0$
(Lineer Bağımlıdır)

ör $w\{e^x, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$
(Lineer Bağımsız)

ör $w[\cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} =$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$ (Lineer Bağımsız)

**Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen
Diferansiyel Denklemler**

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (1)

Teorem: y_1 (1) denklemini için bir özel çözüm ise $y = c_1 y_1$ de bir özel çözümdür.

Teorem: y_1, y_2 'ler (1) için Lineer bağımsız iki özel çözüm iseler, $y = c_1 y_1$ $y = c_2 y_2$ bunlar da özel bir çözümdür.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ 'de bir özel çözümdür.

Teorem: y_1, y_2, y_3 'ler (1) için Lineer bağımsız özel bir çözüm ise $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ de özel bir çözümdür.

Teorem: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 'ler bir denklem için Lineer bağımsız özel bir çözümler ise

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$ 'lerde özel bir çözümdürler.

① denklemin için çözüm methodu;

$a_n y^{(n)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ bu denklemin sağlayan fonksiyonları arayalım. Bunun için bütün türevleri benzer olan ve bütün özel çözümleri içerecek olan $y = e^{kx}$, (k bilinmiyor) bulunacak

$$y' = k e^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

$$y''' = k^3 e^{kx}$$

$$y^{(n)} = k^{(n)} e^{kx}$$

$$e^{kx} (a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0) = 0$$

$$e^{kx} \neq 0 \quad \forall x, k \text{ için}$$

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

polinomuna ① denkleminin karakteristik polinomunu denir.

2. Dereceden Denklemin Köklerini Bulma Denklemi

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

14/10/2010

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

$$a_n k^{(n)} + a_{n-1} k^{(n-1)} + \dots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

veya

$$y^2 + bx + c = 0 \begin{matrix} \nearrow x_1 \\ \searrow x_2 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right) ky$$

$-(x_1 + x_2) \quad x_1 \cdot x_2$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{matrix} |x-1 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow x_2 \\ \searrow x_3 \end{matrix}$$

$a+b+c+d=0$ ise $x_1=1$ 'dir.

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{matrix} |x-x_1 \\ \text{---} \end{matrix}$$

$x_1 = \text{kök alalım}$

Karakteristik denklemin köklerinin durumlarına göre verilen denklemin çözümlerini inceleyelim.

1) Karakteristik denklemin kökleri farklı real sayılar olsun.

$$k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq \dots \neq k_n \in \mathbb{R}$$

Bu durumda genel çözüm

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$$

 γ_1 γ_2 γ_3 γ_n

g.g.

OR

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow k_1 = -1 \\ \rightarrow k_2 = 2 \end{matrix}$$

-1.2

Ters alinmiz
hal:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad \text{g.4.}$$

OR

$$y'' - y = 0$$

$$k^2 - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow k_1 = 1 \\ \rightarrow k_2 = -1 \end{matrix}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{g.4.}$$

OR

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$

$$k^3 + 2k^2 - 5k - 6 = 0$$

$$k_1 \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} k^3 + 2k^2 - 5k - 6 & k+1 \\ \hline -k^3 + k^2 & \\ \hline k^2 - 5k - 6 & \\ -k^2 + k & \\ \hline -6k - 6 & \\ +6k + 6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{matrix} \rightarrow k_2 = 2 \\ \rightarrow k_3 = -3 \end{matrix}$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x} \quad \text{g.4.}$$

2) Karakteristik denklemin kökleri katlı reel sayılar olsun ; $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n \in \mathbb{R}$ olsun

Bu durumda genel çözüm;

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}) e^{k_1 x} \quad \text{g.c.}$$

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

$$y_2 = x e^{k_1 x}$$

$$y_3 = x^2 e^{k_1 x}$$

$$\vdots$$

$$y_n = x^{n-1} e^{k_1 x}$$

~~ÖR~~ $y'' + 2y' + y = 0$

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow (k+1)^2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = -1$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} \quad \text{g.c.}$$

~~ÖR~~ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$(k-1)^3 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x \quad \text{g.c.}$$

3) Karakteristik denklemin köklerinden bir kısmı katlı reel geri kalan kısmı farklı reel sayı olsun.

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_p \in \mathbb{R},$$

$$k_{p+1} \neq k_{p+2} \neq \dots \neq k_n \in \mathbb{R}$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_p x^{p-1}) e^{k_1 x} + c_{p+1} e^{k_{p+1} x} + c_{p+2} e^{k_{p+2} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

g.g.

~~OR~~

$$y^V - 5y^{IV} + 6y''' = 0$$

$$k^5 - 5k^4 + 6k^3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$$k^3(k^2 + 5k + 6) = 0 \rightarrow k_4 = -2$$

$$k_5 = -3$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{-3x}$$

g.g.

~~OR~~

$$y^{IV} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$$

$$k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4 = 0$$

$$k_1 \leftarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 + 1 - 9 + 11 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4 & k+1 \\ + k^4 + k^3 & \rightarrow k_2 = -1 \\ \hline -2k^3 - 9k^2 & \\ + 2k^3 + 2k^2 & \\ \hline -7k^2 - 11k & \\ + 7k^2 + 7k & \\ \hline -4k - 4 & \\ + 4k + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} k^3 - 2k^2 - 7k - 4 & k+1 \\ -1 - 2 + 7 - 4 = 0 & \rightarrow k_3 = -1 \\ \hline k^2 - 3k - 4 & \\ -1 & \\ 4 & \end{array}$$

$$(k+1)^3 (k-4) = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{4x}$$

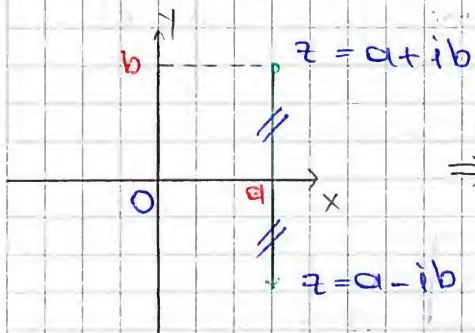
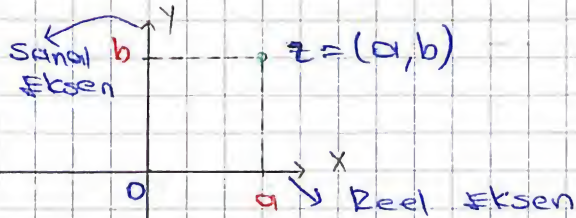
g.g.

1) Kökler kompleks sayı olsun

kompleks sayı
 $z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$z = (a, b) = \underline{a + ib}$$



$\Rightarrow z = a + ib$ 'nin eşleniği

$$\bar{z} = a - ib \text{ 'dir.}$$

$$z = 3 + 2i \longrightarrow \bar{z} = 3 - 2i$$

$$z = -3 - 2i \longrightarrow \bar{z} = -3 + 2i$$

$$e^{\bar{z}} = \cos x - i \sin x$$

Karakteristik polinomun (denklemin) kökleri farklı kompleks sayılar olsun

$$k_1 = a_1 + ib_1$$

$$k_2 = a_1 - ib_1$$

1

$$k_3 = a_2 + ib_2$$

$$k_4 = a_2 - ib_2$$

2

...

$$k_{n-1} = a_n + ib_n$$

$$k_n = a_n - ib_n$$

3

$$y = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x} + \dots + A_n e^{k_n x}$$

g.4

1) kökleri için

$$y = A e^{k_1 x} + B e^{k_2 x}$$

$$y = A e^{(a_1 + ib)x} + B e^{(a_1 - ib)x}$$

$$y = A e^{a_1 x} \cdot e^{ib_1 x} + B e^{a_1 x} \cdot e^{-ib_1 x}$$

$$y = e^{a_1 x} [A e^{ib_1 x} + B e^{-ib_1 x}]$$

$$y = e^{a_1 x} [A \cos b_1 x + i \sin b_1 x] + [B \cos b_1 x - i \sin b_1 x]$$

$$y = e^{a_1 x} [\underbrace{(A+B)}_{C_1} \cos b_1 x + i \underbrace{(A-B)}_{C_2} \sin b_1 x]$$

$$y = e^{a_1 x} [C_1 \cos b_1 x + C_2 \sin b_1 x]$$

g.4.

2) kökleri için

$$y = e^{a_2 x} [C_3 \cos b_2 x + C_4 \sin b_2 x]$$

g.4.

3) kökleri için

$$y = e^{a_n x} [C_{n-1} \cos b_n x + C_n \sin b_n x]$$

g.4.

$$y = e^{a_1 x} (C_1 \cos b_1 x + C_2 \sin b_1 x) \\ + e^{a_2 x} (C_3 \cos b_2 x + C_4 \sin b_2 x) \\ \vdots \\ + e^{a_n x} (C_{n-1} \cos b_n x + C_n \sin b_n x)$$

g.4.

OR

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -i = \sqrt{-1} \\ k_2 = +i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{-b} = i\sqrt{b} \quad \forall \in \mathbb{R} \text{ (if in)} \right)$$

$$\sqrt{-b^2} = ib$$

$$k_1 = -i = 0 - i \Leftrightarrow a - ib \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$k_2 = i = 0 + i \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$y = e^{ax} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad \text{g.4.}$$

OR

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-2}}{1} = -1 - i \\ k_2 = -1 + i \end{cases}$$

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad \text{g.4.}$$

$$y'' + 4y \Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_3 = 2$$

$$k_4 = -3$$

$$k_5 = 1+i$$

$$k_6 = 1-i$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-3x} + e^x (C_5 \cos x + C_6 \sin x) \quad \text{g.4.}$$

$$\textcircled{1} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \begin{matrix} = 0 \text{ ise Homojen} \\ \text{Homojen} \\ \text{Değil} \end{matrix}$$

$\textcircled{1}$ numaralı denklemin genel çözümünü denklemin homojen kısmının genel çözümünü ile denklemin tamamının bir özel çözüm topları şeklindedir.

Teorem: $y_{(g.a)} = y = y_{n.k.(g.a)} + y_{ö.g.}$

ör

$$y'' - y' - 2y = 4$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{matrix}$$

$$y_{ö.g.} = -2$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2 \quad \text{g.4.}$$

ör

$$y'' + 9y = 18x$$

$$k^2 + 9 = 0 \rightarrow \begin{matrix} 3i \\ -3i \end{matrix}$$

$$y_{ö.g.} = 2x$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 2x \quad \text{g.4.}$$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x) e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad P(x) \text{ polinomun}$$

Bu tür denklemlerin çözümünü k 'nin karakteristik

denkleminin kökleri ile irdeleyeceğiz.

Örneğin k denklemin kökü olmasın

$$y = e^{kx}$$

denklemde k derecesinden katsayıları bilinmeyen

denklemdir.

Bu denklemi hesaplarız. Dif. Denkleminde

denklem yapılır. Bu özdeşlikten

$$y = e^{kx} + d,$$

① Denklemleri için;

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x) e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad P(x) \text{ polinomun}$$

Bu tür denklemlerin çözümünü k 'nin karakteristik polinomun kökleri olup olmadığını irdeleyeceğiz.

1) k karakteristik polinomun kökü olmasın.

$$k, \quad \underline{y_{\text{öğ}} = y = \Theta(x) \cdot e^{kx}}$$

$\Theta(x)$ $P(x)$ polinomunun derecesinden katsayıları bilinmeyen bulunması gereken bir polinomdur.

$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ (\equiv) Türevleri hesaplanır. Dif. Denkleminde yerine yazılır. Eşitlik özdeşlik yapılır. Bu özdeşlikten katsayılar bulunur.

Özdeşlik

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$$

$$\left(\begin{array}{l} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \\ d = d_1 \end{array} \right)$$

ÖR

$$y'' + 9y = 18x \quad \underline{\text{esası}} \quad 18x \cdot \underset{k=0}{e^{0x}}$$

$$k^2 + 9 = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = 3i \\ k_2 = -3i \end{array} \right\} \text{ kök değil}$$

$$y_{\text{öğ}} = y = (ax + b)$$

$$y' = 0$$

$$9a + 9b = 18x$$

$$9a = 18$$

$$9b = 0$$

$$a = 2$$

$$b = 0$$

$$y'' = 0$$

$$y''_G = 2x$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 2x \quad \text{g.g.}$$

OK

$$y'' - y' - 2y = x^2 + x - 3$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} k=0 \\ k \neq -1, 2 \end{matrix} \right\} \text{ kök 'değil'}$$

$$y''_G = y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

$$\rightarrow 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c \equiv x^2 + x - 3$$

$$-2ax^2 - (2a + 2b)x + 2a - b - 2c \equiv x^2 + x - 3$$

$$-2a = 1$$

$$-2a - 2b = 1$$

$$x - 2b = x$$

$$b = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-2a - b - 2c = -3$$

$$-1 - 0 - 2c = -3$$

$$-2c = -2$$

$$c = 1$$

$$y''_G = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \text{g.g.}$$

ör $y'' - y' - 2y = x^2 e^x$ $\rightarrow k=1$
 $k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k=1 \\ k=-2 \end{matrix}$ kök değil

$y_{\text{öç}} = y = (ax^2 + bx + c)e^x$

$y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$y'' = 2ae^x + (2a + b)e^x + (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$4ax + 2b$

$\Rightarrow (2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c - 2ax - b - ax^2 - bx - c - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^x \equiv x^2 e^x$

$\Rightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \equiv x^2 = x^2 + 0x + 0$

$-2a = 1$

$2a - 2b = 0$

$2a + b - 2c = 0$

$a = -\frac{1}{2}$

$b - 0 = -\frac{1}{2}$

$-1 - \frac{1}{2} = 2c \Rightarrow c = -\frac{3}{4}$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^x$

g.c.

2) k karakteristik polinomun r katlı kökü olsun bu durumda özel çözüm şöyle aranır.

$y_{\text{öç}} = y = x^r \cdot \Theta(x) e^{kx}$

Türevler alınır yerine konur. özdeşlikler bulunur.

ör $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$ $\rightarrow k=2$

$\begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{matrix} \rightarrow 1 \text{ katlı kök}$

$y_{\text{öç}} = y = x \cdot a e^{2x}$

$y' = a e^{2x} + 2ax e^{2x}$

$y'' = 2a e^{2x} + 2a e^{2x} + 4ax e^{2x}$

$4a e^{2x}$

$$(4a + 4ax - 5a - 10ax + 6ax)e^{2x} \equiv 2e^{2x}$$

$$-a = 2$$

$$a = -2$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 2x e^{2x} \quad \text{g.4.}$$

~~ör~~
$$y'' + y' - 2y = x^2 e^x \rightarrow \lambda = 1$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix} \quad \text{1 katlı kök}$$

$$y_{\text{öç}} = y = x(ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

$$y' = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

$$y'' = (6ax + 2b)e^x + (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

$$(6ax + 2b + 6ax^2 + 4bx + 2c + ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^3 - 2bx^2 - 2cx)e^x \equiv e^x$$

$$9ax^2 + (6a + 6b)x + 2b + 3c \equiv x^2$$

$$9a = 1$$

$$6a + 6b = 0$$

$$2b + 3c = 0$$

$$a = \frac{1}{9}$$

$$b = -\frac{1}{9}$$

$$3c = \frac{2}{9}$$

$$c = \frac{2}{27}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{9} x^2 + \frac{2}{27} x \right) e^x \quad \text{g.4.}$$

~~ör~~
$$y'' - 2y' + y = 4e^x \rightarrow \lambda = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{2 katlı kök}$$

$$y_{\text{öç}} = y = x^2 a e^x$$

$$y' = 2ax e^x + ax^2 e^x$$

$$y'' = 2ae^x + 2axe^x + 2axe^x + ax^2 e^x$$

$$(2a + 4ax + ax^2 - 4ax - 2ax^2 + ax^2)e^x \equiv 4e^x$$

$$2a \equiv 4$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + 2x^2 e^x \quad 9.4$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x) \cos \beta x e^{kx}, P(x) \sin \beta x e^{kx}$$

$P(x) \cos \beta x e^{kx}$ geçerli olsun bu durumda $k+i\beta$ iste bu sayının karakteristik polinomunun kökü olup olmadığını irdeleyeceğiz

1) $k+i\beta$ karakteristik polinomun kökü olmasın bu durumda özel çözüm

$y_{\text{öç}} = y = [A_1(x) \cos \beta x + A_2(x) \sin \beta x] e^{kx}$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ polinomları $P(x)$ 'in derecesinden katsayıları bulunması gereken polinomlar türevlerini alınıp yerine konup özdeşlikler katsayılar bulur.

21/10/2010

ÖR

$$y'' - y' - 2y = x + 3e^{-x}$$

$$k=0$$

$$k=-1$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1$$

$$k_2 = 2$$

kök
Değil

1 katlı kök

$$y_{\text{öç}} = y = ax + b + cx e^{-x}$$

$$y' = a + ce^{-x} - cx e^{-x}$$

$$y'' = -c \cdot e^{-x} - ce^{-x} + cx e^{-x}$$

74

$$-a - 2ax - 2b + (-2c + cx - c + cx - 2cx)e^{-x} = x + 3e^{-x}$$

$$\begin{aligned} -2a &= 1 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3c &= 3 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

$$-a - 2b = 0$$

$$\frac{1}{2} - 2b = 0 \quad b = \frac{1}{4}$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - x e^{-x}$$

g.c.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x) \cdot \cos \beta x \cdot e^{kx} = f(x)$$

①

 $k + i\beta$

veya

$$P(x) \sin \beta_1 x e^{k_1 x} = f(x)$$

②

1 veya 2'deki kompleks sayıların karakteristik polinomun kökü olup olmasına göre özel çözümler şöyle aranır.

$$\textcircled{1} \text{ için } y_{\text{öç}} = y = [A_1(x) \cos \beta x + A_2(x) \sin \beta x] e^{kx}$$

y', y'', y''' türevleri alınır. Yerine konur. Özdeşlikten söz konusu katsayılar bulunur.

$$\textcircled{2} \text{ için } y_{\text{öç}} = y = [A'_1(x) \cos \beta_1 x + A'_2(x) \sin \beta_1 x] e^{k_1 x}$$

ör

$$y'' + 4y = \cos x$$

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ \beta &= 1 \end{aligned} \rightarrow i = k + i\beta$$

$$k^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{aligned} k_1 &= 2i \\ k_2 &= -2i \end{aligned} \rightarrow \text{kök değil}$$

$$y''_0 = y = a \cos x + b \sin x$$

$$y' = -a \sin x + b \cos x$$

$$y'' = -a \cos x - b \sin x$$

$$(-a \cos x - b \sin x + 4a \cos x + 4b \sin x) \equiv \cos x$$

$$3a \cos x + 3b \sin x \equiv \cos x$$

$$3a = 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$3b = 0$$

$$b = 0$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x \quad \text{g. 4}$$

OR

$$y'' + 4y = x \sin x e^x$$

$$k_1 = 2i$$

$$k_2 = -2i$$

$$\downarrow$$

$$k=1$$

$$B=1$$

$$\rightarrow 1+i$$

Köt değil

$$y''_0 = [(ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x] e^x$$

$$y' = [a \cos x + (-ax-b) \sin x + c \sin x + (cx+d) \cos x] e^x + [(ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x] e^x$$

$$y'' = [-a \sin x - a \sin x + (-ax-b) \cos x + c \cos x + c \cos x + (-cx-d) \sin x] e^x$$

$$+ [a \cos x + (-ax-b) \sin x + c \sin x + (cx+d) \cos x] e^x$$

$$+ [a \cos x + (-ax-b) \sin x + c \sin x + (cx+d) \cos x] e^x$$

$$+ [(ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x] e^x$$

$$[(-ax-b+2c+a+cx+d+a+cx+d+ax+b+4ax+4b) \cos x +$$

$$(-2a-cx-d-ax-b+c-ax-b+c+cx+d) \sin x] e^x = [0 \cdot \cos x + x \sin x] e^x$$

$$(4a+2c)x + 2a+4b+2c+2d \equiv 0$$

$$(-2a + 4b + 2c + 2d = 0$$

$$(-2ax - 2a - 2b + 2c \equiv x$$

$$-2a = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-2a - 2b + 2c = 0$$

$$-a - b + c = 0$$

$$-b + c = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$4a + 2c = 0$$

$$2a + c = 0$$

$$2 \cdot -\frac{1}{2} + c = 0$$

$$c = 1$$

$$-\frac{1}{2} + 3 + 1 = d$$

$$\frac{7}{2} = -d$$

$$\frac{1}{2} + 3 = -d$$

$$d = -\frac{7}{2}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left[\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cos x + \left(x - \frac{7}{2} \right) \sin x \right] e^x$$

g-4

2) $k+i\beta$ karakteristik polinomun r katlı kökü olsun.

$$y_{\text{öç}} = y = x^r [\theta_1(x) \cos \beta x + \theta_2(x) \sin \beta x] e^{kx}$$

ör

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x e^{-x}$$

$$k = -1, \beta = 1$$

$$-1+i$$

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \rightarrow -1-i, -1+i$$

Bir katlı kök

$$y_{\text{öç}} = y = [x a \cos x + b \sin x] e^{-x}$$

$$y' = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x] e^{-x} + [-ax \cos x - bx \sin x] e^{-x}$$

$$y'' = [-2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \cos x] e^{-x}$$

$$+ [-a \cos x + ax \sin x - b \sin x - bx \cos x] e^{-x}$$

$$+ [-a \cos x + ax \sin x - b \sin x - bx \cos x] e^{-x}$$

$$+ [ax \cos x + bx \sin x] e^{-x}$$

$$(-ax + 2b - a - bx - a - bx + ax + 2a + 2bx - 2ax + 2ax) \cos x + (-2a - bx + ax - b + ax - b + bx - 2ax + 2b - 2bx) \sin x] e^{-x} =$$

$$= 2 \sin x e^{-x} \rightarrow (0 \cdot \cos x + 2 \sin x) e^{-x}$$

$$\begin{aligned} -2a &= 2 & 2b &= 0 \\ a &= -1 & b &= 0 \end{aligned}$$

$$y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) - x \cos x e^{-x}$$

9.4.

27/10/2010

ODEV: 12

- 1) $y'' - 2y'' = 0$
- 2) $y'' + 4y = 0$
- 3) $y'' - y = 0$
- 4) $y'' + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$
- 5) $y'' - 6y' + 8y = 0$
- 6) $y'' - 4y' + 4y = x^2 + x - 2$
- 7) $y'' - 6y' + 3y = e^x + e^{2x}$
- 8) $y''' + y'' + y' + y = x e^x$
- 9) $y'' + 4y = 2x \sin 2x$
- 10) $y'' + 3y' + 2y = (x-2)e^x$
- 11) $y'' + 2y' - 3y = x \cos x + 2 \sin x$
- 12) $y'' - 4y = e^x \cos x$
- 13) $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$
- 14) $4y'' + 4y' + y = 6e^{-\frac{x}{2}}$
- 15) $y''' + y'' = x^2 + 2 + 3xe^x$
- 16) $y'' + 9y = (x^2 + 2x + 1)e^3x$
- 17) $y'' + y = e^x \cos x$
- 18) $y'' - y = 4e^{2x} \sin x$

B)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

(Homojen) ①

Teorem: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ bir denklemin lineer bağımsız özel çözümleri ise

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

g.c.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Uygulamalarda daha çok karşılaşılanlar 2. mertebeden denklemlerdir.

$$y'' + \underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{e_1(x)} y' + \underbrace{\frac{a_0}{a_2}}_{e_2(x)} y = 0$$

$$y'' + e_1(x)y' + e_2(x)y = 0$$

$y_1 = y_2(x)$ bir özel çözüm ise

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int e_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

diğer özel çözüm olur.
(Lineer bağımsızdır)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

g.c.

ör

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

$$y_1 = x \quad \text{ö.g.}$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{x^2} dx$$

$$y_2 = x \int \frac{\frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$y_2 = x \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{1}{2x}$$

$$y = C_1 x + C_2 \left(-\frac{1}{2x} \right) \quad \text{g.4.}$$

ör $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ ö.4.

$$y_2 = \frac{\cos x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\frac{\cos^2 x}{x^2}} dx$$

$$y_2 = \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos^2 x}{x^2}} dx$$

$$y_2 = \frac{\cos x}{x} \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$y_2 = \frac{\cos x}{x} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}$$

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$$

① denklemi için çözüm metodu

Mertebe düşürme metodu.

① için $y_1 = y_1(x)$ bir özel çözüm ise

$$y = y_1 z, \quad z = z(x) = ? \text{ (Bulunacak)}$$

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ (türevleri alınır)

① denkleminde yerine yazılır. Sadeleştirme sonucu z 'li terim ortada kalmamak üzere ① denklemi

$z', z'', \dots, z^{(n)}$ 'li türevlerini içeren durumda olur.
Bu denklemde $z'=u$ $u=u(x)=?$ (Bulunacak)

$$z''=u'$$

$z^{(n)}=u^{(n-1)}$ yazılarak u ve u 'nun $(n-1)$ mertebeden türevini içeren bir dif. denklem karşımıza gelir. Bu denklemin mertebesi ① denkleminin mertebesinden 1 düşük olur.

ÖR $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, $y_1 = \cotan x$

$$y = z \cotan x$$

$$y' = z' \cotan x - \frac{z}{\sin^2 x}$$

$$y'' = z'' \cotan x - \frac{z'}{\sin^2 x} - \frac{z' \sin^2 x - 2z \sin x \cos x}{\sin^4 x}$$

$$z'' \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2z'}{\sin^2 x} + \frac{2z \cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{\sin^2 x} z \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$z'' \sin x \cos x - 2z' = 0$$

$$z'' \frac{\sin 2x}{2} - 2z' = 0$$

$$z'' \sin 2x - 4z' = 0$$

$$z' = u$$

$$z'' = u'$$

$$u' \sin 2x - 4u = 0$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{4}{\sin 2x}$$

$$\ln u = 4 \int \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$\left(\begin{array}{l} 2x = v \\ \frac{dx}{2} = \frac{dv}{2} \end{array} \right)$$

$$2 \int \frac{dv}{\sin v}$$

$$\left(\begin{array}{l} \tan \frac{v}{2} = t \\ dv = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin v = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right)$$

$$\ln u = 2 \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln u = 2 \ln t + \ln c_1$$

$$u = c_1 t^2 = c_1 \tan^2 \frac{v}{2}$$

$$z' = \frac{dz}{dx} \quad u = c_1 \tan^2 x$$

$$dz = c_1 \tan^2 x \, dx$$

$$z = c_1 \int \tan^2 x \, dx + c_2$$

$$= c_1 \left[\int (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx \right] + c_2$$

$$z = c_1 \left[\int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int dx \right] + c_2$$

$$z = c_1 [\tan x - x] + c_2$$

$$y = z \cotan x \quad \text{den}$$

$$y = [c_1 (\tan x - x) + c_2] \cotan x \quad \text{g.g.}$$

~~108~~ $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

$$y_1 = x \quad \text{ö.g.}$$

$$y = xz$$

$$y' = z + xz'$$

$$y'' = 2z' + xz''$$

$$y''' = 3z'' + xz'''$$

$$3x^3 z'' + x^4 z''' - 6x^2 z' - 3x^3 z'' + 6xz + 6x^2 z' - 6xz = 0$$

$$\Rightarrow x^4 z''' = 0, \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow z''' = 0$$

$$z'' = C_1$$

$$z' = C_1 x + C_2$$

$$\begin{pmatrix} z' = u \\ z'' = u' \\ z''' = u'' \\ u'' = 0 \end{pmatrix}$$

$$y = xz \text{ 'den}$$

$$z = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y = x \left(C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) \quad \text{g.g.}$$

ÖDEV: 13

1) $x^2 y'' - xy' - 3y = 0, \quad y_1 = x^3$

2) $xy'' - (x+2)y' + y = 0$

3) $x^2 y'' + xy' - (x^2 + x + 1)y = 0, \quad y_1 = \frac{e^{-x}}{x}$

4) $xy'' + (3x-1)y' + 2(x-1)y = 0, \quad y_1 = -2e^{-2x}$

$$b) a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1)$$

Teorem: y_1, y_2, \dots, y_n (1)'in homojen kısmı için lineer bağımsız özel çözümler ve $y_{\text{öç}}$ denklemin tamamı için bir özel çözüm ise

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_{\text{öç}}$$

$y_{\text{homojen}} - g.c.$

Euler (Gauss) Dif. Denklemi

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

$= 0$

Çözüm Metodu:

$$x = e^t, \quad y = y(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

\dot{y}

$$\left(\begin{array}{l} x = e^t \\ \frac{dx}{dt} = e^t \\ \frac{dt}{dx} = e^{-t} \end{array} \right)$$

$$y' = e^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \dot{y} \right) \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

$$= (-e^{-t} \dot{y} + e^{-t} \ddot{y}) e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dt} [e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})] \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

84

$$y''' = e^{-3t} (\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = e^{-n(t)} (\quad)$$

Bu değerler (2) denkleminde yerine yazılırsa denklem sabit katsayılı şekle gelir. O da çözülür.

ör

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \text{ (Euler)}$$

$$x = e^t$$

$$y' = e^{-t} \ddot{y}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) + e^t \cdot e^{-t} \dot{y} \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} - y = 0$$

$$\ddot{y} - y = 0$$

$$k^2 - 1 = 0 \rightarrow k_1 = 1$$

$$\rightarrow k_2 = -1$$

$$\rightarrow y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

g.c.

ör

$$(Aym) \rightarrow x^3 y'' - 2xy = 4$$

$$x^2 y'' - 2y = \frac{4}{x} \text{ (Euler)}$$

$$x = e^t$$

$$y' = e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 4e^{-t} \rightarrow k = -1$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1$$

$$\rightarrow k_2 = 2$$

1 katlı
kök

$$y_{\text{öq}} = y = at \cdot e^{-t}$$

$$\dot{y} = ae^{-t} - at e^{-t}$$

$$\ddot{y} = -ae^{-t} - ae^{-t} + at e^{-t}$$

$$(-2a + at - a + at - 2at) e^{-t} = 4e^{-t}$$

$$-3a = 4$$

$$a = -\frac{4}{3}$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{4}{3} t e^{-t}$$

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2 - \frac{4}{3} \ln x \frac{1}{x} \quad \text{g.c.}$$

OR $x^3 y''' - x^2 y'' + 2x y' - 2y = \cos \ln x \quad (\text{Euler})$

$$x = e^t$$

$$y' = e^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$y''' = e^{-3t} (\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y)$$

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y - \ddot{y} + \dot{y} + 2\dot{y} - 2y = \cos t$$

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y - 2y = \cos t$$

Legendre (Gauss) Dif. Denklemleri

$$a_n(bx+c)^n y^{(n)} + a_{n-1}(bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2(bx+c)^2 y'' + a_1(bx+c) y' + a_0 y = f(x)$$

= 0

Gözüm metodu

$$bx+c=e^t \rightarrow \frac{dt}{dx} = be^{-t}, \quad y' = be^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = b^2 e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$y''' = b^3 e^{-3t} (\ddot{\dot{y}} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$$

$$\vdots$$

ör

$$(x+1)^2 y'' + (x+1) y' + y = 4 \cos \ln(x+1)$$

$$x+1 = e^t$$

$$y' = e^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} + y = 4 \cos t \rightarrow \begin{matrix} k=0 \\ p=1 \end{matrix}$$

$$\ddot{y} + y = 4 \cos t$$

$$k^2 + 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k_1 = i \\ k_2 = -i \end{matrix}$$

1 katlı
kök

$$y_{\text{öğ}} = y = a t \cos t + b t \sin t$$

$$\dot{y} = a \cos t - a t \sin t + b \sin t + b t \cos t$$

$$\ddot{y} = -a \sin t - a \sin t - a t \cos t + b \cos t + b \cos t - b t \sin t$$

$$\rightarrow (-a t + 2b + a t) \cos t + (-2a - b t + b t) \sin t \equiv 4 \cos t + 0 \sin t$$

$$2b \equiv 4$$

$$b = 2$$

$$-2a = 0$$

$$a = 0$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$$

$$y = c_1 \cos \ln(x+1) + c_2 \sin \ln(x+1) + 2 \ln(x+1) \sin \ln(x+1)$$

ÖDEV: 14

- 1) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$
- 2) $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 2x$
- 3) $x^2 y'' - 2y = x^2$
- 4) $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$
- 5) $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 2x + 1$
- 6) $(x-1)^2 y'' + 4(1-x)y' + 6y = x$
- 7) $(x-1)^3 y''' - 3(x-1)^2 y'' - 6(1-x)y' - 6y = \sin \ln x$

03/11/2010 *

Sabitlerin Değişimi Metodu

İster sabit katsayılı homojen olmayan ister değişken katsayılı homojen olmayan denklemlerin çözümünü için önemli bir metottur. Başka hiçbir şekilde göremeyeceğimiz denklemleri bu metotla çözeriz.

3. mertebeden denklemler için açıklayalım. Daha yüksek mertebeliler için benzer düşünce 2. mertebeden için özel durumlar söz konusu olacaktır.

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Metodun uygulanabilmesi için mutlaka homojen kısmın genel çözümünü bulunmalıdır.

$$y_{h3} = y = C_1 y_1 = C_2 y_2 = C_3 y_3 \quad \text{olsun}$$

$c_1 = c_1(x)$
 $c_2 = c_2(x)$
 $c_3 = c_3(x)$

} bulunacaktır.
 x'in fonksiyonlarıymış gibi hesabı kılacağız.
 c'leri bulacağız. Bulup yerine yazarsak elde
 edilecek çözüm söz konusu denklemin genel
 çözümü olacaktır.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3}_{0' \text{ olmalı}}$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + \underbrace{c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3'}_{0' \text{ olmalı}}$$

$$y''' = \dots + \underbrace{c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3''}_{\frac{f(x)}{a_3} \text{ olmalı}}$$

$$\begin{cases}
 c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\
 c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\
 c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = \frac{f(x)}{a_3}
 \end{cases}$$

c_1', c_2', c_3' bulunacaktır

$$\Rightarrow c_1' = f_1(x) = \frac{dc_1}{dx} \Rightarrow dc_1 = f_1(x) dx$$

$$c_1 = F_1(x) + \alpha_1 \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \text{ den}$$

$$\Rightarrow c_2' = f_2(x)$$

$$c_2 = F_2(x) + \alpha_2$$

$$y = (F_1(x) + \alpha_1) y_1 + (F_2(x) + \alpha_2) y_2 + (F_3(x) + \alpha_3)$$

$$\Rightarrow c_3' = f_3(x)$$

$$c_3 = F_3(x) + \alpha_3$$

g.4.

OR

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$$

$$k^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2i \\ k_2 = -2i \end{cases}$$

$$y_{h.g.c.} = y = \frac{C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}{0}$$

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x}{0}$$

$$y'' = \frac{-2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x}{\cos 2x}$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin 2x / C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x &= \cancel{0}^{2 \sin^2 2x} \\ \cos 2x / -2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x &= \frac{4}{\cos 2x} \end{aligned} \right\} \pm$$

$$\rightarrow 2C_2' \sin^2 2x + 2C_2' \cos^2 2x = 4$$
$$2C_2'$$

$$\Rightarrow 2C_2' = 4$$

$$C_2' = 2$$

$$C_2 = 2x + \alpha_2$$

$$C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0$$
$$\downarrow$$
$$2$$

$$\Rightarrow C_1' \cos 2x + 2 \sin 2x = 0$$

$$C_1' = -2 \tan 2x$$

$$\rightarrow C_1 = \ln |\cos 2x| + \alpha_1$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \text{ den}$$

$$y = (\ln |\cos 2x| + \alpha_1) \cos 2x + (2x + \alpha_2) \sin 2x$$

$$\text{DR } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

$$y_{h.g.a.} = y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + \underbrace{c_1' e^x + c_2' + x e^x}_0$$

$$y'' = \underbrace{c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x}_{\frac{e^x}{x}}$$

$$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} c_1' e^x + c_2' x e^x &= 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x &= \frac{e^x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_2' e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$c_2' = \frac{1}{x}$$

$$c_2 = \ln x + \alpha_2$$

$$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$$

$$\frac{1}{2}$$

$$c_1' + 1 = 0$$

$$c_1' = -1 \rightarrow$$

$$c_1 = -x + \alpha_1$$

$$\Rightarrow y = (-x + \alpha_1) e^x + (\ln x + \alpha_2) x e^x \quad g.c.$$

OR

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -2 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \underbrace{c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x}}_0$$

$$y'' = \underbrace{-c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x}}_0$$

$$\frac{1}{e^{2x} + 1}$$

$$\Rightarrow c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} = 0$$

$$-c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x} + 1} \quad \Rightarrow \quad (+)$$

$$\begin{aligned} c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x} &= \frac{1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

$$-c_2' e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

$$c_2' = -\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$c_2 = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$$

$$= -\int \frac{e^x \cdot e^x dx}{e^{2x} + 1}, \quad \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$$

$$= -\int \frac{t dt}{t^2 + 1} = -\frac{1}{2} \ln|t^2 + 1|$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \ln |e^{3x} + 1|$$

$$c_1 e^{-x} + c_2' e^{2x} = 0 \Rightarrow c_1' = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

$$\downarrow$$

$$\left(-\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right)$$

$$\rightarrow c_1 = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}, \quad \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}$$

$$c_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan e^x + d_1$$

$$\Rightarrow y = (\arctan e^x + d_1) e^{-x} + \left(-\frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| + d_2 \right) e^{-2x}$$

9.4.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos e^x$$

$$\begin{cases} r^2 - 3r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow r_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \underbrace{c_1' e^x + c_2' e^{2x}}_0$$

$$y'' = \underbrace{\quad}_{e^{3x} \cos e^x} + c_1' e^x + 2c_2' e^{2x}$$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^x + 2c_2' e^{2x} = e^{3x} \cos e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' e^{2x} = e^{3x} \cos e^x \\ c_2' = e^x \cos e^x \end{cases}$$

$$c_2 = \int e^x \cos e^x dx, \quad \left(\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right)$$

$$c_2 = \int \cos t dt$$

$$c_2 = \int \cos t dt$$

$$c_2 = \sin e^x + c_2$$

$$c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \Rightarrow c_1' = -e^{2x} \cos e^x$$

\downarrow
 $e^x \cos e^x$

$$c_1 = - \int \frac{e^{2x} \cos e^x}{e^x e^x} dx \quad \left(\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right)$$

$$c_1 = - \int t \cos t dt$$

$$c_1 = - \left(t \sin t - \int \sin t dt \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = u \\ dt = du \\ dv = \cos t dt \\ v = \sin t \end{array} \right.$$

$$c_1 = - t \sin t + \int \sin t dt$$

$$c_1 = - t \sin t - \cos t + c_1$$

$$c_1 = -e^x \sin e^x - \cos e^x + c_1$$

$$\Rightarrow y = (-e^x \sin e^x - \cos e^x + c_1) e^x + (\sin e^x + c_2) e^{2x}$$

g.c.

"ÖDEV:

$$1) y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}$$

$$2) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(1-x)^2}$$

$$4) y'' - 6y' + 9y = e^{2x} x^{3/2}$$

$$5) y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$$

$$6) y''' - 3y'' + 3y' - y = \sqrt{x} e^x$$

$$7) y''' + 6y'' + 12y' + 8y = \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$8) y'' - y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x$$

$$9) y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \ln x$$

"ÖB" $x^2 y'' - 3xy' + 3y = x - 1$ (Euler gözlemler)

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$$

$$y_1 = x \quad \text{ö.c.}$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{+\int \frac{3}{x} dx}}{x^2} dx$$

$$y_{n.g.s} = y = C_1 x + C_2 y_2$$

$$y' = \dots + \dots$$

$$y'' = \dots + \dots$$

$$\frac{x-1}{x^2}$$

Verilen ilk şartlar altında Çözüm Bulma

ör $y'' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

$$k^2 + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = i \\ k_2 = -i \end{cases}$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 2 \text{ için}$$

$$y(0) = 3 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 3$$

$$y'(0) = 2 = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 2$$

$$\Rightarrow y = 3 \cos x + 2 \sin x$$

ör $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$

(Euler)

$$x = e^t$$

$$y' = e^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$$

$$y(1) = 3, y'(1) = 1 \text{ için}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1) = 3 = c_1 e + c_2 e^2 \\ y'(1) = 1 = c_1 e + 2c_2 e^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 e^2 = -2 \\ c_2 = -2e^{-2} \end{cases}$$

$$c_1 e + 2c_2 e^2 = 1 \text{ den}$$

$$\downarrow$$

$$-2e^{-2}$$

$$c_1 e - 4 = 1 \rightarrow c_1 e = 5$$

$$c_1 = \frac{5}{e}$$

$$\Rightarrow y = 5e^{-1}(e^x) - 2e^{-2}(e^{2x})$$

4. ÖR $y''' + 3y'' - 10y' = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0, y''(0) = 0$

$$\hookrightarrow k^3 + 3k^2 - 10k = 0 \rightarrow k(k^2 + 3k - 10) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 2 \quad -5 \quad \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = -5 \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-5x} \quad \text{s.c.}$$

$$y' = 2c_2 e^{2x} - 5c_3 e^{-5x}$$

$$y'' = 4c_2 e^{2x} + 25c_3 e^{-5x}$$

$$y(0) = 7, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \text{ için}$$

$$y(0) = 7 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$y'(0) = 0 = 2c_2 - 5c_3$$

$$y'(0) = 0 = 4c_2 + 25c_3$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 7 = c_1 + c_2 + c_3 \\ y'(0) = 0 = 2c_2 - 5c_3 \\ y'(0) = 0 = 4c_2 + 25c_3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_2 = c_3 = 0 \\ c_1 = 7 \\ \Rightarrow y = 7 \end{array}$$

OR $y'' + 4y' = 12x^2 + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$$k^2 + 4k = 0 \rightarrow \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = -4 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} k=0 \\ 1 \text{ katlı} \\ \text{kök} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k=1 \\ \text{kök değil} \end{array}$$

$$y_{\text{öç}} = y = x(ax^2 + bx + c) + de^x$$

$$ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c + de^x$$

$$y'' = 6ax + 2b + de^x$$

$$\Rightarrow 6ax + 2b + 12ax^2 + 8bx + 4c + 5de^x = 12x^2 + e^x$$

$$12a = 12$$

$$a = 1$$

$$6a + 8b = 0$$

$$b = -\frac{6}{8}$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

$$2b + 4c = 0$$

$$c = \frac{3}{8}$$

$$5d = 1$$

$$d = \frac{1}{5}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} + x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{5}e^x \quad \text{g.c.}$$

$$y' = -4c_2 e^{-4x} + 3x^2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}e^x$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad \text{icin}$$

$$C_1 = ?$$

$$C_2 = ?$$

Uç Nokta Problemleri, Özdeğerler - Öz fonksiyonlar

$$1) y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0$$

$$2) y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

Şeklinde verilen bir problem için durumu irdeleyelim. 1 ile 2 arasındaki belirlenmiş fark. 2 denkleminin $a < b$ gibi farklı iki noktadan iki şart içeriyor. 2 denkleminde uç noktalarda $y(a) = 0, y(b) = 0$ şartlarını sağlayacak şekilde (a, b) aralığında $x \in \mathbb{R}$ aralığında çözüm arayacağız. Bu tip bir problem genelde uç nokta veya sınır değer problemleri olarak adlandırılır.

ÖR $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

$$y_{g.c} = y(x) = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \text{ için}$$

$$y(0) = c_1 \underbrace{\cos \sqrt{3} \cdot 0}_1 + c_2 \underbrace{\sin \sqrt{3} \cdot 0}_0 = 0$$

$$\boxed{c_1 = 0} \text{ olacak}$$

$$y(\pi) = c_1 \underbrace{\cos \sqrt{3} \pi}_{\neq 0} + c_2 \underbrace{\sin \sqrt{3} \pi}_0 = 0 \text{ dan}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \text{ olacak}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 0} \text{ asıl çözüm}$$

ÖR 2) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

$$y_{g.c.} = \boxed{y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$$

$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ için

$$\Rightarrow y(0) = \underbrace{C_1 \cos 2 \cdot 0}_1 + \underbrace{C_2 \sin 2 \cdot 0}_0 = 0 \text{ 'dan}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = 0} \text{ dan}$$

$$y(\pi) = \underbrace{C_1 \cos 2\pi}_0 + \underbrace{C_2 \sin 2\pi}_0 = 0 \quad \forall C_2 \in \mathbb{R} \text{ için}$$

\downarrow
0 idi $\neq 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0$

$y(\pi) = 0$ sağlanıyor.

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_2 \sin 2x} \rightarrow \text{Aşık bir olmayan bir çözüm}$$

Şeklinde her fonksiyon her C_2 için hem verilen şartları ve dif. denklemi sağlıyor.

Özdeğerler - Öz fonksiyonlar:

③ $y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$

denklemini λ 'ya göre irdelleyelim.

Eğer $\lambda = 3$, $p(x) = 0$, $q(x) = 1$ ise ($a = 0$, $b = \pi$ için) örnek 1 söz konusu olur. $\lambda = 4$ içinde örnek

2 söz konusu olur. Örnek 1 ve 2'den görüldüğü

gibi parametre içeren sınır değer problemleri

parametrenin özel değerine olduğuna bağlı olabilir.

Genelinde bu durum böyledir. 3 denkleminde olduğu

gibi λ 'yı içeren sınır değer problemi bir

öz değer problemi olarak adlandırılır. Öz değer problemlerinde sorulan sorun şudur. Hangi λ parametresinin reel değeri için bir sınır değer problemi aşikar olmayan yani 0'dan farklı çözüm verir. Bu şekilde bulunan λ parametresine problemin öz değeri ve karakteristik değeri adı verilir. Bu durumda $\lambda = 4$ değeri $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ sınır değer probleminin öz değeridir. Örnek 1'de $\lambda = 3$ 'ün aynı problemin öz değeri olmadığını söyleyebiliriz.

λ^* 3 ifadesi ile verilen problemin öz değeri olsun ve bu λ yerine λ^* değeri konulduğunda elde edilen y_* problemin aşikar olmayan ($\neq 0$) çözümü olsun.

Yani;

$$y_*'' + p(x)y_*' + \lambda^* q(x)y_* = 0, \quad y_*(0) = 0, \quad y_*(\pi) = 0$$

Bu durumda y_* değerine λ^* karşılık gelen öz fonksiyon adı verilir. Mesela örnek 2'de $\lambda^* = 4$, $\underline{\text{öz değer}}$

$$y_*(x) = \sin 2x, \quad c_2 = 1 \text{ olmalıdır.}$$

öz-fonksiyon

ÖR 3) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $(L) > 0$

ile verilen sınır değer problemi için öz değer ve öz fonksiyonlar arayalım.

λ 'nin bütün olası reel pozitif, negatif ve sıfır değerlerini göz önüne almalıyız.

1) $\lambda = 0$ ise $y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ için

$$y_{g.a} = y(x) = c_1(x) + c_2$$

$y(0) = 0$, $y(L) = 0$ için

$$\rightarrow y(0) = \cancel{c_1} \cdot 0 + c_2 = 0 \text{ dan}$$

$$\boxed{c_2 = 0} \text{ olmalı}$$

$$y(L) = c_1 L + c_2 = 0 \text{ dan}$$

\downarrow 0 idi

$$\Rightarrow c_1 L = 0 \text{ dan } \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \text{ olur}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 0} \text{ bulunur}$$

Böylece özdeğer ve özfonksiyon yoktur.

2) $\lambda < 0$ ise, $\lambda = -\alpha^2$ ($\alpha > 0$) alalım

$$\rightarrow y'' - \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \text{ setlinde dir.}$$

$$y_{g.a} = y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} = \underbrace{A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x}_{\text{veya } y(0)=0, y(L)=0 \text{ için}} \quad \begin{matrix} A = c_1 + c_2 \\ B = c_1 - c_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{aligned} \cosh \alpha x &= \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \\ \sinh \alpha x &= \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow y(0) = \underbrace{A \cosh \alpha \cdot 0}_{\neq 0} + \underbrace{B \sinh \alpha \cdot 0}_0 = 0 \text{ dan}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0} \text{ olmalı}$$

$$y(L) = \underbrace{A \cosh \alpha \cdot L}_0 + \underbrace{B \sinh \alpha \cdot L}_{\neq 0} = 0 \text{ dan}$$

$$\boxed{B = 0} \text{ olmalı}$$

Böylece tek bir çözüm 0 olan ağırlık çözümdür.

$$\boxed{y(x) = 0}$$

Dolayısıyla bu durumda da özdeğer ve öz fonksiyonlardan bahsedemiyoruz.

3) $\lambda > 0$ ise $\lambda = \alpha^2$, ($\alpha > 0$) olsun

$$y'' + \alpha^2 y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0, (L > 0)$$

$$\Rightarrow y_{\text{gen.}} = \boxed{y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x}$$

$y(0) = 0, y(L) = 0$ için

$$\Rightarrow y(0) = \underbrace{c_1 \cos \alpha \cdot 0}_{\neq 0} + \underbrace{c_2 \sin \alpha \cdot 0}_0 = 0 \text{ 'dan}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \text{ olsun}$$

$$y(L) = \underbrace{c_1 \cos \alpha L}_0 + \underbrace{c_2 \sin \alpha L}_{\neq 0} = 0 \text{ 'dan}$$

\hookrightarrow ifadesi $c_2 \neq 0$ durumunda da sağlanır. Bu durum sadece $\alpha L, \pi$ 'nin katı tam katları olması durumunda da sağlanır.

$$\alpha L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots, \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ iseler}$$

sağlanır.

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, (n=1, 2, \dots) \text{ için değer sağlanır.}$$

Böylece λ_n değerlerine öz değerler. Buna karşılık gelen $y_n = \sin \frac{n\pi}{L} x$, ($n=1, 2, 3, \dots$) öz fonksiyonları söz konusudur. ($c_2 = 1$ olmalıdır)

~~OP~~ 4)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0, \quad (L > 0)$$

$\alpha > 0$ olmak üzere $\lambda = \alpha^2$ alalım

Bu durumda :

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

$$y_{\text{gen}} = \boxed{y(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x}$$

$y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$ için

$$\Rightarrow y(0) = C_1 \underbrace{\cos \alpha \cdot 0}_1 + C_2 \underbrace{\sin \alpha \cdot 0}_0 = 0 \text{ dan}$$

$$\boxed{C_1 = 0} \text{ olur.}$$

$$y(x) = C_2 \sin \alpha x$$

$$y' = C_2 \alpha \cos \alpha x \rightarrow y'(L) \text{ için } \Rightarrow y'(L) = C_2 \alpha \cos \alpha L = 0 \text{ dan}$$

$C_2 \neq 0$ iken de sağlanır.

$\alpha L, \frac{\pi}{2}$ 'nin pozitif tek katları olması durumunda sağlanır.

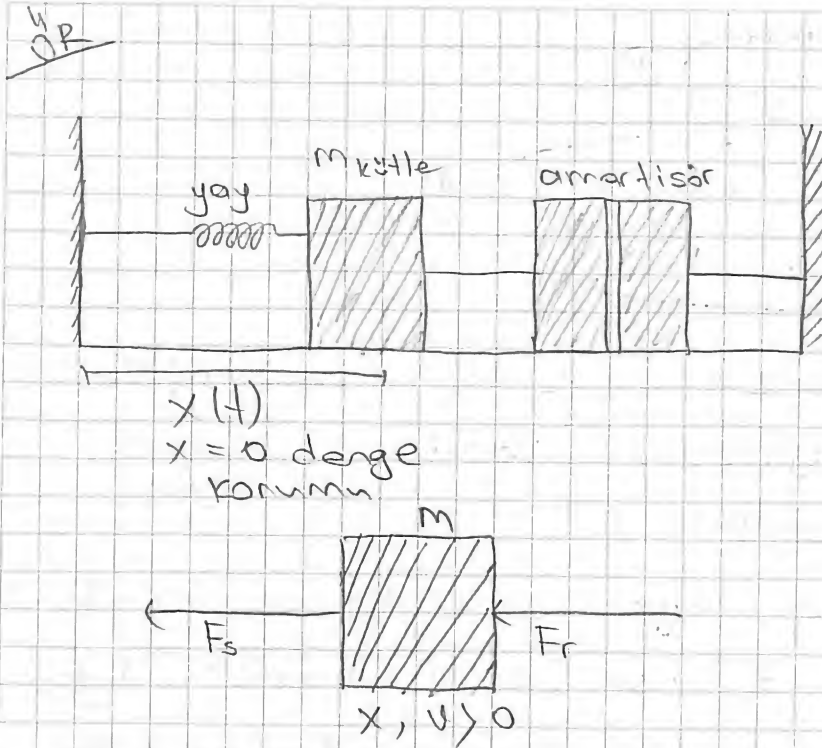
$$\alpha L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, \dots$$

$$\lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}, \frac{9\pi^2}{4L^2}, \dots, \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}, \dots \text{ de sağlanır.}$$

Böylece

$$\lambda_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4L^2}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$y_n(x) = \sin \left((2n-1) \frac{\pi}{2L} x \right), \quad \left(\begin{array}{l} n=1, 2, \dots \\ C_2 = 1 \text{ olacak} \end{array} \right) \text{ değer alır.}$$



m kütleli bir cisme etki eden kuvvetlerin yönleri

Bir m kütleli cisim kendisine bir F_s kuvvetiyle uygulayan bir yaya ve hemde kendisine F_r kuvvetiyle etki eden bir amortisöre bağlansa yayın F_s tepki kuvvetinin denge konumundan itibaren kütlenin yer değiştirmesi ile (Sıgıya doğru pozitif sola doğru negatif) orantılı olduğunu ve amortisörün uyguladığı F_r kuvvetinin kütlenin $v = \frac{dx}{dt}$ hızı ile orantılı olduğunu varsayalım. 2. şekil yardımıyla bu iki kuvvetin uygun etki yönünü şöyle ifade edelim.

$$F_s = -kx, F_r = -cv \quad (c > 0 \text{ sönüm sabiti}, k > 0 \text{ yay sabiti})$$

$F_r = -cv$ kütlenin hareketinde hava direncini gösteren sistemdeki sürtünme kuvveti olarak bakabiliriz. x pozitif iken F_s negatif v pozitif iken F_r negatiftir.

$F=ma$, newton kanunundan

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_r = F \quad (1)$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{c \frac{dx}{dt}}_{F_r} + \underbrace{kx}_{F_s} = 0 \quad (2)$$

Böylece bu 2. mertebeden lineer homojen dif. denklem kütlenin serbest titreşimini temsil eden bir matematiksel modeldir.

F_r , F_s 'ye ilaveten eğer m kütlelerine bir $F(t)$ dış kuvveti etki ederse bu dış kuvvet 1. denkleminin sağ tarafına eklenmelidir. Böylece 2. denklemi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3) \text{ olur.}$$

3 numaralı

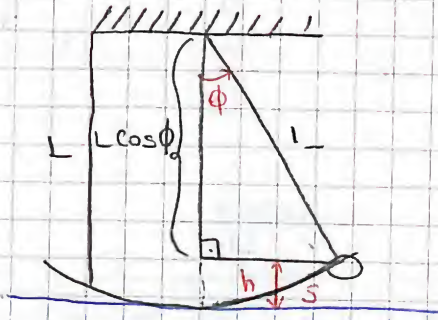
Bu denklem $F(t)$ dış kuvveti etkisizdeki bir kütlenin zorlanmış titreşimini temsil eder. Şekil 1'de cismin bulunduğu konum ile denge konumu yayın gerilmemiş durumunda cismin konumu arasında uzaklığı x ile gösterilir. Yay gerildikçe $x > 0$ yay sıkıştırıldıkça $x < 0$ olur. Hooke kanununa göre yayın kütleye uyguladığı güçlendirilmiş F_s kuvveti yayın sıkıştırıldığı veya gerildiği x uzaklığı ile orantılıdır. Yani

$F_s = -kx$, ($k > 0$) Amortisör yok ise ve bütün sönümlenme kuvvetleri ihmal edilirse. Bu durumda $c = 0$ demektir. Böyle hareketle sönümsüz hareket. $c > 0$ ise hareketle sönümlü hareket adı verilir.

3 denkleminde $F(t)=0$ bu durumda hareket serbest hareket $F(t) \neq 0$ zorlanmış hareket adı verilir.

25/11/2010

Basit Sarkaç



$$h = L - L \cdot \cos \theta$$

$$h = L(1 - \cos \theta)$$

Şekilde görüldüğü gibi L uzunluğunda bir ipin ucuna dahası kütsüz bir arbuğa bağlı sağa sola salınan bir m kütesinden oluşan basit sarkaç ele alalım θ ve yön şekildedeki gibi olsun.

$$\theta = \theta(t)$$

Bu durumda kütleli konum denklemini belirlemek için bir matematiksel model oluşturalım

$$s = L \cdot \theta$$

Böylece kütleli hızı için $v = \frac{ds}{dt} = L \cdot \frac{d\theta}{dt}$ yazarız

$$\text{Kütleli kinetik enerjisi } T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\text{Potansiyel enerjisi ise } V = mgL(1 - \cos \theta)$$

Mekanik enerjinin korunumu kuramına göre $T + V = C = \text{sabit}$

$$\frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos \theta) = C = \text{sabit}$$

$$\downarrow$$

$$t \quad m L^2 \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + mgL \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$mL^2 \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \sin\theta = 0}, \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$

$$\sin\theta \approx \theta, \quad c \frac{d\theta}{dt}$$

Ortama sönümleme denklemine karşılık gelen $c \frac{d\theta}{dt}$ terimide hesaba katılırsa

$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} + k\theta(t) = 0}$$

4. ÖP

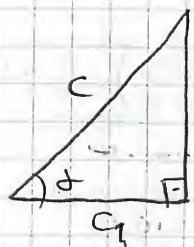
Serbest sönümsüz hareket

ne sönümlü ne de dış kuvvet etkisi olan bir yaya bağlı kütleye sahipsek $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

denklemi $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ olur ki şekli alır.

Genellikle $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alır. $m x'' + kx = 0$ denklemi $x'' + \omega_0^2 x = 0$ şeklinde yeniden ifade edilir.

Bu denklemi indirirsek $x_{gen} = \boxed{x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}$



Bu gözümün açıkladığı hareketi analiz etmek için C ve α çözümünü

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \cos \alpha = \frac{c_1}{c}, \quad \sin \alpha = \frac{c_2}{c}$$

olarak şekilde şetilden de görüldüğü gibi seçeriz.

Burada C_1 veya C_2 veya her ikisi de negatif olabilir.

$$\alpha = \begin{cases} \arctan \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ (Birinci bölge)} \\ \pi + \arctan \frac{c_2}{c_1}, & c_1 < 0, c_2 > 0 \text{ (2. veya 3. Bölge)} \\ 2\pi + \arctan \frac{c_2}{c_1}, & c_1 < 0, c_2 < 0 \text{ (4. Bölge)} \end{cases}$$

Burada $\arctan \frac{c_2}{c_1}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında hesaplanabilir.

Her durumda $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ ve

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \cos \alpha \frac{c_1}{c} \quad \sin \alpha \frac{c_2}{c} \quad \text{den}$$

$$x(t) = c \left(\frac{c_1}{c} \xrightarrow{\cos \alpha} \cos \omega t + \frac{c_2}{c} \xrightarrow{\sin \alpha} \sin \omega t \right)$$

$$= c (\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c \cos(\omega t - \alpha)}$$

Böylece kütle denge durumunda iken:

- 1) Genlik c ,
- 2) Dalresel frekans ω ve
- 3) Faz açısı α

olmak üzere ileri geri salınım yaparak bu tip hareketler basit harmonik hareketler olarak adlandırılır.

~~ÖR~~ $m = \frac{1}{2}$ kg kütelli bir cisim 100 Newtonluk

bir kuvvetle 2 metre gerdirilmiş bir yayın ucuna bağlanmıştır. Başlangıç konumu $x_0 = 1$ m başlangıç hızı $v_0 = -5$ m/s ile harekete başlatılıyor. Bu

başlangıç şartlarının anlamı $t=0$ anında cisim sağ tarafa yerleştirilmiş olup sola doğru hareket ediyor. Böyle bir cismin konum fonksiyonunu bulun.

Yay sabiti $k = \frac{100 \text{ N}}{2 \text{ m}} = 50 \text{ N/m}$ 'dir.

$$\frac{1}{2} x'' + 50x = 0, \quad (c=0)$$

$$x'' + 100x = 0$$

$$\rightarrow x(t) = x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

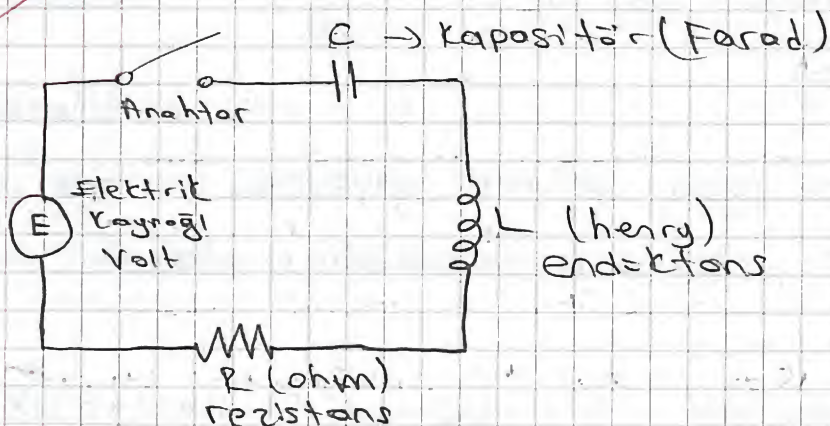
$$x'(t) = -10 c_1 \sin 10t + c_2 \cos 10t$$

$$x_0 = x(0) = 1 \text{ m} \quad x'(0) = v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -5 \text{ m/s}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2} \sin 10t$$

~~8P~~



RLC Seri devresi

Böyle bir devre için $L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E(t)$

denklemini geçerlidir. $\frac{dQ}{dt} = I(t) \rightarrow LQ'' + RQ' + \frac{1}{C} Q = E(t)$

Devre elemanı

Voltaj Geçişi

indüktör

$$L \frac{dI}{dt}$$

Rezistans

$$RI$$

Kapasitör

$$\frac{1}{C} Q \text{ (coulomb)}$$

① $LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$ denkleminde voltaj $E(t)$ 'nin bilindiği kabul ediliyor. Bir çok pratik problemde Q şarjından ziyade I (akım) şiddeti önemli olduğundan ① de Q yerine I yazarsak

Elek. $L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = E'(t)$ elde ederiz.

Mekanik Sistem

Kütle
Sönüm katsayısı c
yay sabiti
konum (pozisyon)
Kuvvet F

Elektriksel Sistem

indüksiyon (L)
Rezistans (R)
Ters kapasitör ($\frac{1}{C}$)
Şarj elektrik kuvveti
Elektrik Kuvveti E veya I

Mek.

$$mX'' + cX' + kX = F(t)$$

ör.

Sönümsüz zorlanmış salınımlar

$F(t) = F_0 \cos \omega t$ dış kuvveti altında sönümsüz zorlanmış harmonik hareketi ele alalım. Genel $mX'' + cX' + kX = F(t)$ denklemini ile verilen ifadeler $c=0$ (sönümsüz) alınırsa $mX'' + kX = F_0 \cos \omega t$ denklemini söz konusu olur. Bu denklemin çözümünü ele alalım.

$$X(t) = X(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \text{ dir.}$$

(Kütle yay sisteminin doğrusal doğal frekansı.)

Dış ve doğal frekansların eşit olmadığını varsayalım yani $\omega \neq \omega_0$ olsun.

$$X_{\text{öç}}(t) = X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$x'(t) = -aw \sin wt + bw \cos wt$$

$$x''(t) = -aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt$$

$$b=0, \quad a = \frac{F_0}{k-mw^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - w^2}$$

Sonuç olarak

$$x(t) = x_{hgg} + x_{öç}$$

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - w^2} \cos wt$$

şeklinde olur.

$$x(t) = c(\cos wt - d) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - w^2} \cos wt$$

şeklinde de yazabiliriz.

Sonuçta elde edilen hareketin doğal dairesel frekansı ω_0 ve dış kuvvet frekansı w olan 2 salınının üstüste eklenmesi olduğu görülür.

~~ör~~

$$m=1, \quad k=9 \quad f_0=80 \quad w=5 \text{ için}$$

$$mx'' + kx = F_0 \cos wt \text{ den } x'' + 9x = 80 \cos 5t \text{ olan}$$

$$= x'' + 9x = 8 \cos 5t$$

$$x(0) = x'(0) = 0 \text{ ise}$$

$$x(t) = ?$$

$$\text{Burada doğal frekans } \omega_0 = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$$

Dış kuvvetin frekansı konusunda belirttiğimiz gibi eşit değildir.

$$x'' + 9x = 80 \cos 5t$$

$$\hookrightarrow x_{h.g.s} = x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

$$x_{\text{ö.g.}} = x(t) = a \cos 5t + b \sin 5t \quad \text{den} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Böylece genel çözüm,

$$x(t) = x_{h.g.s} + x_{\text{ö.g.}} \quad \text{den}$$

$$x(t) = 5 \cos 3t - 5 \sin 5t$$

Seriler Yardımıyla Dif. Denklemlerin Çözümü

Bu metod daha ziyade 2. mertebeden değişken katsayılı lineer özelliklerde polinom katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılır.

Böyle bir çözüm için genel anlamda

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$$

şeklindeki dif. denklemi söz konusu olur. Bu

denklemi diğer bir ifade ile $y'' + \frac{P_1}{P_2} y' + \frac{P_0}{P_2} y = 0$

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (1) \quad P_i(x) \text{ 'ler polinom}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2) \quad P(x), Q(x) \text{ 'ler polinom olmayabilir.}$$

Serilerle denklem çözümlerininin $x = x_0$ gibi noktalarda arayacağız. Noktaları durumlarına göre şu tanımları verelim.

Tanım Eğer $x = x_0$ (1) denkleminde $P_0(x) = 0$ 'in kökü değil ise veya (2) denkleminde $P(x), Q(x)$ ifadelerinin Taylor serisine açılabilirdiği bir nokta ise bu tür noktaya dif. denkleminin **ADI NOKTASI (Teki)** denir.

Tanım $x = x_0$, $P_0(x) = 0$ 'in kökü ise veya $P(x), Q(x)$ ifadelerinin Taylor serisine açılmadığı bir nokta ise bu noktaya dif. denkleminin **AYKIRI NOKTASI (Singular)** denir.

Adi Nokta Civarında Çözümler

Adi nokta civarında çözümleri $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Taylor serisi yardımıyla arayacağız. Ve çözümlerimizi $x_0 = 0$ noktasında ele alacağız. Böylece seri

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ şeklinde olacaktır.}$$

$$x^2 y'' + x y' - 2y = 0 \text{ için } x_0 = 0 \text{ bir aykırı noktadır.}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0 \text{ için } x_0 = 0 \text{ " " "}$$

$$y'' + \ln x y' + 3y = 0 \text{ için } x_0 = 0 \text{ " " "}$$

$y'' + x^2 y' - xy = 0$ için $x_0 = 0$ bir adi noktadır.

$y'' - y' + xy = 0$ için $x_0 = 0$ " " "

DR

$y'' - xy' - 2y = 0$ denklemini çözelim.

$x_0 = 0$ civarında çözelim. Bir adi noktadır.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n - 2 a_n \right) x^n = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots$$

0 olmalı

$$\Rightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n - 2 a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{n+1}$$

Genel indirgeme formülü katsayıları bulmaya yarar a_0, a_1 keyfi

Tekler için

$n=1$ için

$$a_3 = \frac{a_1}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{6}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{4}$$

$$a_{2n+1} = \frac{a_1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

$$a_{2n+1} = \frac{a_1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

110 güçler için

$n=0$ için

$$a_1 = \frac{a_0}{1}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5}$$

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}}{2n-1}$$

$$a_{2n} = \frac{a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$y = (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}) +$$

$$+ (a_0 x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = a_1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots \right) +$$

$$+ a_0 \left(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 3} + \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots \right)$$

$$= C_1 y_1 + C_2 y_2$$

g.c.

g.c.

Bu çözüm y_1 y_2 serilerinin yakınsaklık aralığındaki x değerleri için geçerlidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| < 1 \quad \text{yakınsaklık olsun} \\ \text{(D'Alembert oran testi)}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \rightarrow y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \rightarrow$$

OR

$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$ denklemini seriler yardımıyla çözelim.

$x_0 = 0$ civarında çözelim

$x_0 = 0$ adi noktadır. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + n(n-1) a_n + n a_n - a_n \right] x^n = 0$$

0 olmalı

$$\Rightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} + n(n-1) a_n + n a_n - a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(n+1)(n+2) a_{n+2} + n(n-1) a_n + n a_n - a_n}_{(n-1) a_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n-1)a_n}{n+2}$$

genel indirgeme denklemi

a_0, a_1 keyfi

Tekler için

$$a_3 = \frac{-1 \cdot a_1}{3} = 0$$

$$a_5 = \frac{-(3-1)a_3}{5} \xrightarrow{\text{oidi}} = 0$$

$$a_7 = \frac{-(5-1)a_5}{7} \xrightarrow{\text{oidi}} = 0$$

$$a_{2n+1} = 0 \text{ olur}$$

çiftler için

$$a_2 = \frac{1 \cdot a_0}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_4 = \frac{-1 a_2}{4}$$

$$a_6 = \frac{-3 a_4}{6}$$

$$a_8 = \frac{-5 a_6}{8}$$

$$a_{2n} = \frac{-(2n-3) \cdot a_{2n-2}}{2n}$$

x x

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} a_0$$

\downarrow
 $2^n \cdot 2!$

($n=1, 2, \dots$)

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots + (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y = \overset{c_1}{a_1} x + \overset{c_2}{a_0} \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 x^6}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^8}{2^4 \cdot 4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \dots \right) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

g.c. g.c.

$$y_1 = x \text{ in } |x| < 1 \Rightarrow \underline{\underline{-1 < x < 1}}$$

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^{2n}$$

u_n

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

ör $y'' + y = 0$ denklemini seri yardımıyla çözelim

$x_0 = 0$, adi nokta

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \dots$$

$$y'' = \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

\uparrow $n+2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0$$

0 olmalı

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Tekler için

$$a_3 = \frac{-a_1}{2 \cdot 3}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{4 \cdot 5}$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{6 \cdot 7}$$

⋮

$$a_{2n+1} = \frac{-a_{2n-1}}{2n(2n+1)}$$

x x

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n(2n+1)} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2n+1)!$$

Giftler için

$$a_2 = \frac{-a_0}{1 \cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{3 \cdot 4}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{5 \cdot 6}$$

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{(2n-1)2n}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$(2n)!$$

$$y = (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \cdots) +$$

$$+ (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = \underset{\substack{\downarrow \\ c_1}}{a_1} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right)$$

$$+ \underset{\substack{\downarrow \\ c_2}}{a_0} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right)$$

$$\Rightarrow y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

~~ör~~ $y'' + xy = 0$ seri yardimsiz çözülmez.

$y' + xy = 0$ seri yardimsiz çözülür.

$$\frac{y'}{y} = -x$$

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$y = ce^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{g.c.}$$

Seri ile

($x_0 = 0$ da)
aykırı nok.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

~~ör~~ $y' + xy = 0$, $x_0 = 0$ da gözelim.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\rightarrow y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$\rightarrow y' + xy = 0 \text{ için } \rightarrow \cancel{a_1} + 2\cancel{a_2}x + 3\cancel{a_3}x^2 + 4\cancel{a_4}x^3 + 5\cancel{a_5}x^4 + 6\cancel{a_6}x^5 + \dots + \cancel{a_0}x + \cancel{a_1}x^2 + \cancel{a_2}x^3 + \cancel{a_3}x^4 + \cancel{a_4}x^5 + \cancel{a_5}x^6 + \cancel{a_6}x^7 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{a_1}^0 + \overbrace{(2a_2 + a_0)}^0 x + \overbrace{(3a_3 + a_1)}^0 x^2 + \overbrace{(4a_4 + a_2)}^0 x^3 + \overbrace{(5a_5 + a_3)}^0 x^4 + \overbrace{(6a_6 + a_4)}^0 x^5 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{a_0}{2} \quad a_3 = \frac{-a_1}{3} = 0 \quad a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4} \quad a_5 = \frac{-a_3}{5} = 0$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$a_{2n+1} = 0$$

Giftler form

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4 \cdot 4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots \right)$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

$$y = c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

g.4.

ÖDEV

$$y' + x^2 y = 0$$

$$y' - x^2 y = 0$$

) Seri yardımıyla çöz.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!} \quad \text{icin} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1} n!(n+1)} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{x^{2n}} \right|$$

$$= x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = x^2 \cdot 0 < 1 \quad \text{olmalı ki seri yakınsak olur.}$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{0} \rightarrow \infty \rightarrow x^2 < \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$$

$\rightarrow \forall x$ için y_1 yakınsaktır.

Dif. Denklemler Sistemleri

1. Mertebeden Sistemler

Bağımlı değişkenlerin en yüksek mertebeden türevleri t 'nin ve daha küçük mertebeden türevlerinin açık fonksiyonları olarak yazılabilecek dif. denklemlerin sistemini ele alalım. Mesela 2 tane 2. mertebeden denklemin bir sistemi durumunda kabulüyoruz;

$$x_1'' = f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2')$$

$$x_2'' = f_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2')$$

şeklinde yazılabilmektedir. Böyle yüksek mertebeden herhangi bir sistemin 1. mertebeden eşdeğer bir sisteme dönüştürülebilir olması onun hem pratik hemde

teorik önemi gösterir. Bu dönüştürmenin nasıl gerçekleştirildiğini tanımlamak için önce

$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ (2) şeklinde sadece n . mertebeden bir tek denklemden oluşan sistemi ele alalım. x_1, x_2, \dots, x_n , ($x_i = x_i(t)$)

bağımlı değişkenlerini şöyle tanımlayalım.

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad x_n = x^{(n-1)} \quad (3)$$

$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \dots$ bu şekilde devam ettiğini görürüz. Burada (3)'ün (2)'de yerine konmasıyla n tane 1. mertebeden denklemden oluşan

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

⋮

$$x_{n-1}' = x_n$$

$x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ (4) sistemi elde edilir.

Bu sistem (2)'deki orijinal n . mertebeden denkleme eşdeğerdir. Bunun anlamı $x(t)$ 'nin (2) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

(3)'de tanımlanan $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ fonksiyonlarının (4)'teki sistemi sağlamasıdır.

11
OK $X = X(t)$ için

$x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \sin 2t$ denklemini sisteme çevirelim. Denklemini ② formunda,

$$x''' = f(t, x, x', x'') = -3x'' - 2x' + 5x + \sin 2t$$

$$= 5x - 2x' - 3x'' + \sin 2t$$

Buradan $x_1 = x$, $x_2 = x' = x_1'$, $x_3 = x'' = x_2'$

kurumyla 3 tane 1. mertebeden sistemden oluşan

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \sin 2t \text{ sistemi elde edilir.}$$

Bu sistemi görmek ① denklemini çözmekle aynıdır.

①'in çözümünü ise iyi biliyoruz. Buradaki fayda mesela $x'' = x^3 + (x')^3$ gibi lineer olmayan denklemlerin çözümünde zorlukları aşmaktır.

11
OK

2. mertebeden denklem sistemi

$$2x'' = -6x + 2y$$

$$y'' = 2x - 2y + 40 \sin 3t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \text{①}$$

olsun. Bu sistemi 1. mertebeden eşdeğer sisteme dönüştürelim. Bunun için $x_1 = x$, $x_2 = x' = x_1'$,

$$y_1 = y, y_2 = y' = y_1' \text{ diyelim. Böylece ① sistemi}$$

$$x_1' = x_2$$

$$2x_2' = -6x_1 + 2y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = 2x_1 - 2y_1 + 40 \sin 3t \quad \text{sistemi olur.}$$

2 Boyutlu Basit Sistemler

2. mertebe lineer (sabit katsayılı + bağımsız değişkenli)

$$x'' + p x' + q x = 0 \quad (1) \quad \text{denklemini}$$

$$x' = y, \quad x'' = y' \quad \text{konumlarıyla}$$

$$x' = y$$

$$y' = x'' = -q x - p y \quad (2) \quad \text{2 boyutlu lineer sisteme dönüştür. (1) ve (2) gözlemleri aslında aynıdır.}$$

ör

$$x' = -2y$$

$$y' = \frac{x}{2}$$

2 boyutlu sisteminin görmeye

$$x'' = -2y' = -2 \left(\frac{x}{2} \right) = -x \quad \text{gözlemi ile başlayalım.}$$

Bu durumu 2. mertebeden $x'' + x = 0$ denklemine dönüştürmüş olur. Burada da genel çözümün

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

veya

$$x(t) = C \cos(t - \alpha)$$

$$\text{Burada } (C_1 = C \cos \alpha, C_2 = C \sin \alpha)$$

$$\text{Böylece } \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} x'(t) = -\frac{1}{2} (-C \sin t + C_2 \cos t)$$

veya

$$y(t) = \frac{1}{2} C \sin(t - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= C \cos(t - \alpha) \\ y(t) &= \frac{1}{2} C \sin(t - \alpha) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= C \cos(t - \alpha) \\ y(t) &= \frac{1}{2} C \sin(t - \alpha) \end{aligned}} \right\} \text{icinin}$$

$$\Rightarrow \cos(t - \alpha) = \frac{x(t)}{C}$$

$$\sin(t - \alpha) = \frac{y(t)}{\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{x^2(t)}{C^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}C^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(t)}{C^2} + \frac{y^2(t)}{\left(\frac{C}{2}\right)^2} = 1$$

→ Flips Ailesi

ör

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2x + y \end{aligned} \quad \left\{ \text{sisteminin genel çözümünü bulalım.} \right.$$

$$x'' = y' = 2x + y = x' + 2x$$

$$\Rightarrow x'' - x' - 2x = 0$$

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

ve g.c.

$y = x'$ den

$$y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

08/12/2010

Genel Anlamda Dif. Denklemlerinin Çözümü

Ele alacağımız sistemler sabit katsayı homojen ve homojen olmayan olacak. Bilinmeyen sayısı ile denklemlerin sayısı eşit olarak sistemde katsayılar determinantı 0'dan farklı olarak

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

$$D^n f(x) = \frac{d^n}{dt^n} f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D^2(e^{3t}) = \frac{d^2}{dt^2}(e^{3t}) = 9e^{3t}$$

$D^n \rightarrow$ duruma göre sabitmiş gibi hesaba katılarak duruma göre de D^n operatör olarak devrede olacak

$$D^n \rightarrow 2D^2, -3D^2, \dots, D^3 ???$$

$$D^n \rightarrow D^2(e^{2t}) \checkmark \quad e^{2t} D^2 ???$$

~~2D~~

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

$$L_1(D)x + L_2(D)y + L_3(D)z = f_1(t)$$

$$m_1(D)x + m_2(D)y + m_3(D)z = f_2(t)$$

$$N_1(D)x + N_2(D)y + N_3(D)z = f_3(t)$$

$L_i(D), M_i(D), N_i(D), 1 \leq i \leq 3$ D'ye bağlı polinomlar.

$$\begin{aligned} \text{ör} \quad D, \quad L_1(D) &= D^3 - 2D^2 + 3D - 1 \\ M_2(D) &= -3D + 2 \\ N_3(D) &= -5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L_1(D) \\ M_2(D) \\ N_3(D) \end{aligned}} \right\} \text{polinomlardır.}$$

Sistem çözümünü gramer metoduna göre yapacağız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} \text{ katsayılar determinantıdır.}$$

$$\Delta = \left(\frac{\quad}{\quad} \right) \rightarrow D\text{'nin bir polinomudur. (Sonuç)}$$

Bu polinomun derecesi sistemin mertebesini belirler. Jari sistemin genel çözümünde kaç parametre kullanacağımız ifade eder. (Bu determinant açılırken değer sabit bir sayıymış gibi rol oynayacaktır.)

Çözüm gramer göre;

$$\Delta x(t) = \begin{vmatrix} f_1 & L_2 & L_3 \\ f_2 & m_2 & m_3 \\ f_3 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Bu determinant açılırken D operatör olarak devrede olur.}$$

$$\Delta x(t) = \left(\frac{\quad}{\quad} \right) \rightarrow \text{Sonuç t'nin bir fonksiyonu olur.}$$

Bu determinant açılırken D operatör olarak devrede olur.

$\Delta x(t) = \frac{\quad}{\quad}$ 'den $x(t)$ bulunur.

$$\Delta y(t) = \begin{vmatrix} L_1 & f_1 & L_3 \\ m_1 & f_2 & m_3 \\ N_1 & f_3 & N_3 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\quad}{\quad}$$

$$\Delta y(t) = \left(\frac{\quad}{\quad} \right) \rightarrow \frac{\quad}{\quad} y(t) \text{ bulunur.}$$

$$\Delta y(t) = \frac{\quad}{\quad} \text{ (çözülür)}$$

$$\Delta z(t) = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & f_1 \\ m_1 & m_2 & f_2 \\ N_1 & N_2 & f_0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{---} = \left(\text{---} \right) \rightarrow \text{---} \quad -z(t) \text{ bulunur.}$$

$$\Delta z(t) = \text{---} \quad (\text{çözülür})$$

Bilinmeyenler çözülürken sabitleri nasıl kullanacağımızı göstereyim.

~~ör~~ $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ } sistemini çözelim

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Dx - y = 0 \\ -2x + (D-1)y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} D & -1 \\ -2 & D-1 \end{vmatrix} = D^2 - D - 2 \quad (1 \cdot 1) - (2 \cdot 3)$$

Denklemleri bu sistem 2. mertebededir. (Derece mertebeyi) verir

$$\Delta x(t) = (D^2 - D - 2)x(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix} = D(0) - 0 \cdot 1 - (0 \cdot (-1))$$

$$= 0 - 0 + 0$$

$$= 0$$

$$(D^2 - D - 2)x(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

$$\Delta y(t) = (D^2 - D - 2)y(t) = \begin{vmatrix} D & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = D(0) + 2 \cdot 0 = 0 + 0$$

$$(D^2 - D - 2)y(t) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = c_3 e^{-t} + c_4 e^{2t}$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{matrix}$$

$$Dx - y = 0 \text{ dan } \text{lagi} \rightarrow -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} - c_4 e^{2t} = 0$$

$$-(c_1 + c_3)e^{-t} + (2c_2 - c_4)e^{2t} = 0 = 0 \cdot e^{-t} + 0 \cdot e^{2t}$$

$$c_1 + c_3 = 0 \rightarrow c_3 = -c_1$$

$$2c_2 - c_4 = 0$$

$$c_4 = 2c_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

KOLAYLIK:

Bir sistemde bilinmeyenlerden herhangi birinin veya her ikisinin önünde D operatörü yoksa o sistemin görünümünde bir kolaylık vardır. Kolaylık alma durumlarında önce önünde operatör olan bilinmeyen bulunurda büyük kolaylık vardır.

$$\left. \begin{array}{l} Dx - y = 0 \\ -2x + (D-1)y = 0 \end{array} \right\} \boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}} \text{ idi}$$

$$\Delta x - y = 0 \text{ den}$$

$$y = Dx(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

ör $\frac{dx}{dt} + x + \frac{dy}{dt} - y = e^t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = t^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D+1)x + (D-1)y = e^t \\ (D^2 + D + 1)x + (D^2 - D + 1)y = t^2 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = \cancel{D^3} - \cancel{D^2} + \cancel{D} + \cancel{D^3} - \cancel{D^2} + \cancel{D} + 1 - \cancel{D^3} - \cancel{D^2} - \cancel{D} + \cancel{D^3} + \cancel{D^2} + 1 = 2$$

Denklemin sistemi 0. mertebededir. Görümde his sabit bulunmamaktadır.

$$\Delta x(t) = 2x(t) = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ t^2 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = -D^2(e^t) - D(e^t) + 1e^t - D(t^2) + 1 \cdot t^2$$

$$= e^t - e^{t^2} + e^t - 2t + t^2$$

$$2x(t) = e^t + t^2 - 2t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^t + t^2 - 2t)$$

sistema g.c.

$$\Delta y(t) = 2y(t) = \begin{vmatrix} D+1 & e^t \\ D^2+D+1 & t^2 \end{vmatrix} = D(t^2) + 1 \cdot t^2 - D^2(e^t) - D(e^t) - 1 \cdot e^t$$

$$= 2t + t^2 - e^t - e^t - e^t$$

$$2y(t) = -3e^t + t^2 + 2t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (-3e^t + t^2 + 2t)$$

$$\left. \begin{aligned} (D^2+D+1)x + (D^2+1)y &= e^t \\ (D^2+D)x + D^2y &= e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2+D+1 & D^2+1 \\ D^2+D & D^2 \end{vmatrix} = D^4 + D^3 + D^2 - D^4 - D^2 - D$$

$$= -D$$

$$\Delta x(t) = -Dx(t) = -\frac{dx(t)}{dt} = \begin{vmatrix} e^t & D^2+1 \\ e^{-t} & D^2 \end{vmatrix} = e^t - e^{-t} - e^{-t}$$

$$= e^t - 2e^{-t}$$

$$x(t) = -2e^t - e^t + c_1$$

$$\hookrightarrow dy(t) = (2e^t - e^{-t}) dt$$

$$y(t) = 2e^t + e^{-t} + c_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -2e^t - e^{-t} + c_1 \\ y(t) = 2e^t + e^{-t} - c_1 \end{cases}$$

GIPTA

OP

$$\begin{cases} (D+2)x + (D+1)y = t \\ 5x + (D+3)y = t^2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 5D + 6 - 5D - 3 = D^2 + 3$$

Kolaylik var

$$\Delta y(t) = (D^2 + 3)y(t) = \begin{vmatrix} D+2 & t \\ 5 & t^2 \end{vmatrix} = 2t + t^2 - 5t = t^2 - 3t$$

$$(D^2 + 3)y(t) = t^2 - 3t$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow k^2 + 3 = 0 &\rightarrow k_1 = -i\sqrt{3} \\ &\rightarrow k_2 = i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$y_{\text{ö.g.}} = y(t) = at^2 + bt + c$$

$$y' = 2at + b$$

$$y'' = 2a$$

$$\Rightarrow 2a + at^2 + bt + c = t^2 - 3t$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$7a + c = 0$$

$$c = -7$$

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t^2 - 3t - 7$$

$$5x + (D+3)y = t^2 \text{ den}$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \left[t^2 - (D+3)(c_1 \cos t + c_2 \sin t + 7t^2 - 3t - 4) \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \left[t^2 + c_1 \sin t - c_2 \cos t - 4t + 3 - 3c_1 \cos t - 3c_2 \sin t - 6t^2 + 9t + 28 \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{aligned} * \text{OR } \frac{dx}{dt} &= 4x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y - e^t \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (D-4)x - y &= e^t \\ -6x + (D+1)y &= -e^t \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} D-4 & -1 \\ -6 & D+1 \end{vmatrix} = D^2 - 3D - 4 - 6 = D^2 - 3D - 10$$

$$\Delta x(t) = (D^2 - 3D - 10) x(t) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ -e^t & D+1 \end{vmatrix} = e^t + e^t - e^t = e^t$$

$$(D^2 - 3D - 10)x(t) = e^t$$

$$k^2 - 3k - 10 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ -2 & 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} k_1 = -2 \\ k_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{\text{hom}} &= x(t) = a e^t \\ x' &= a e^t \Rightarrow \\ x'' &= a e^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a - 3a - 10a)e^t = e^t$$

$$-12a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} - \frac{1}{12} e^t$$

$$(D-4)x - y = e^t \text{ den}$$

$$\rightarrow y(t) = (D-4)(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} - \frac{1}{12} e^t) - e^t$$

$$y(t) = -2c_1 e^{-2t} + 5c_2 e^{5t} - \frac{e^t}{12} - 4c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{5t} + \frac{1}{3} e^t - e^t$$

$$y(t) = -6c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} - \frac{3}{4} e^t$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} - \frac{e^t}{12}$$

$$y(t) = -6c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} - \frac{3}{4} e^t$$

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{1}{12} = 0$$

$$-6c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = \frac{1}{12} \\ -6c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 2c_1 = -\frac{2}{3}$$

$$c_1 = -\frac{2}{21}$$

$$c_2 = \frac{1}{12} + \frac{2}{21}$$

$$x(t) = -\frac{2}{21} e^{-2t} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{21} \right) e^{5t} - \frac{e^t}{12}$$

$$y(t) = \frac{12}{21} e^{-2t} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{21} \right) e^{5t} - \frac{3}{4} e^t$$

II
ODEV

$$\begin{cases} 1) (D-1)x + (D+3)y = e^{-t} - 1 \\ (D+2)x + (D+1)y = e^{2t} + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2) (D+1)x + (2D+7)y = e^t + 2 \\ -2x + (D+3)y = e^t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3) (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1 \\ Dx + z = 0 \\ x - Dy - Dz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4) (D-1)x + (D+2)y = 1 + e^t \\ (D+2)y + (D+1)z = 2 + e^t \\ (D-1)x + (D+1)z = 3 + e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5) Dx - (D+1)y = e^t \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6) (D+1)x + y = e^t \\ (D+1)y - x = e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7) (D-1)x + Dy = 2t + 1 \\ (2D+1)x + 2Dy = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8) 2\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad & D^2x + (D+1)y = 1 \\ & (D+2)x + (-D+1)z = 1 \\ & (D+1)y + (D+2)z = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} D^2x + (D+1)y = 1 \\ (D+2)x + (-D+1)z = 1 \\ (D+1)y + (D+2)z = 0 \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad & (D+2)x + 3y = 0 \\ & 3x + (D+2)y = ze^{2t} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (D+2)x + 3y = 0 \\ 3x + (D+2)y = ze^{2t} \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad & x' = 3x + 2y \\ & y' = -5x + y \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x' = 3x + 2y \\ y' = -5x + y \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad & 4x' + 4x + y' = 1 \\ & 3x' + y + y' = t \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 4x' + 4x + y' = 1 \\ 3x' + y + y' = t \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) \quad & x' = 2x + y + t \\ & y' = x + 2y + t^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x' = 2x + y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \end{aligned}} \right\} \quad x(0) = y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 14) \quad & x'' - 2y' + 3x = 0 \\ & y'' + 2x' + 3y = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x'' - 2y' + 3x = 0 \\ y'' + 2x' + 3y = 0 \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 4 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x'(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15) \quad & x' = 3x + 4y \\ & y' = 3x + 2y + t^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x' = 3x + 4y \\ y' = 3x + 2y + t^2 \end{aligned}} \right\} \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 16) \quad & x' = 6x - 7y + 10 \\ & y' = x - 2y - 2e^{-t} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x' = 6x - 7y + 10 \\ y' = x - 2y - 2e^{-t} \end{aligned}} \right\} \quad x(0) = y'(0) = 1$$

38

$$(D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1$$

$$Dx + z = 0$$

$$x - Dy - Dz = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2+2D+1 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} =$$

$$= (D^2+2D+1)D - 2D(-D^2-1) + 3D(-D^2)$$

$$= \cancel{D^3} + \cancel{2D^2} + D + \cancel{2D^3} + \cancel{2D} - \cancel{3D^3}$$

$$= 2D^2 + 3D$$

$$\Delta x(t) = (2D^2 + 3D)x(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3D \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & -D \end{vmatrix} =$$

$$(2D^2 + 3D)x(t) = \dots \text{gözükür. } (c_1, c_2 \text{ devrede olsun})$$

$$\Delta y(t) = (2D^2 + 3D)y(t) = \begin{vmatrix} D^2+2D+1 & 1 & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -D \end{vmatrix} =$$

$$(2D^2 + 3D)y(t) = \dots \text{gözükür. } (c_3, c_4 \text{ devrede})$$

Gözümü Sürdür

Laplace Dönüşümleri

$$y'' - 3y' + y = \begin{cases} \cos t, & t < a \\ t + 1, & t \geq a \end{cases}$$

Tanım: $F(t)$, $F(x)$ — $0 < t < \infty$ parça parça tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve s de $0 < s < b$ açık aralığında bir parametre olmak üzere eğer

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t) dt$$

integrali mevcut ise bu integral s 'nin bir fonksiyonudur. İşte bu fonksiyona $F(t)$ Laplace dönüşümü denir. ve

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \quad \text{ile gösterilir.}$$

Burada " \mathcal{L} " \rightarrow Laplace operatörü.

\mathcal{L} operatörünün özelliği ve bazı basit fonksiyonların Laplace dönüşümleri.

$$\begin{aligned} 1) \mathcal{L} \text{, lineerdir. } \mathcal{L}[F_1(t) \pm F_2(t) \pm \dots] &= \int_0^{\infty} e^{-st} (F_1(t) \pm F_2(t) \pm \dots) dt \\ &= \mathcal{L}[F_1(t)] \pm \mathcal{L}[F_2(t)] \pm \dots \\ &= f_1(s) \pm f_2(s) \pm \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[k] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot k dt = k \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{k}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{k}{s} (e^{-s \cdot \infty} - e^{-s \cdot 0}) = \frac{k}{s} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[-3] = -\frac{3}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1/4}{s}$$

$$3) a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$$

$$4) a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin \frac{1}{2} t\right] = \frac{1/2}{s^2 + \frac{1}{4}}$$

$$5) \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \mathcal{L}[\cos 3x] = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$6) n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3}, \quad \mathcal{L}[x] = \frac{1!}{s^2}, \dots$$

7) $F(t)$ n -mertebeden türev olan bir fonksiyon ve

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \text{ ise}$$

$$\mathcal{L}[F^{(n)}(t)] = s^n y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - s^{n-3} y''(0) - \dots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}[y'] = sy(s) - y(0), \quad \mathcal{L}[y] = y(s)$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 y(s) - sy(0) - y'(0),$$

$$\mathcal{L}[y'''] = s^3 y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

$$\mathcal{L}[y^{(4)}] = s^4 y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$$

$$8) a \in \mathbb{R}, \mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[e^{at} \cdot F(t)] = f(s-a)$$

$$\mathcal{L}[e^t \cdot \sin t] = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$\downarrow F(t) \rightarrow \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} = f(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{2x} \cdot \cos 3x] = f(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}$$

$$\downarrow F(x) \rightarrow \mathcal{L}[\cos 3x] = \frac{s}{s^2 + 9} = f(s)$$

$$9) \mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n \cdot F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (f(s)), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\mathcal{L}[t \cdot e^t] = (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-1} \right) = - \left(\frac{-1}{(s-1)^2} \right) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\downarrow F(t) \rightarrow \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

Gamma Fonksiyonu

Tanım: $x > 0$, olmak üzere $\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ integrali

yakınsaktır ve bu integral x 'in bir fonksiyonudur. işte bu fonksiyona gamma fonksiyonu denir.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

$\Gamma(x)$ için

a) $\Gamma(1) = 1$

b) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \in \mathbb{R}$

d) $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{Z}^+$

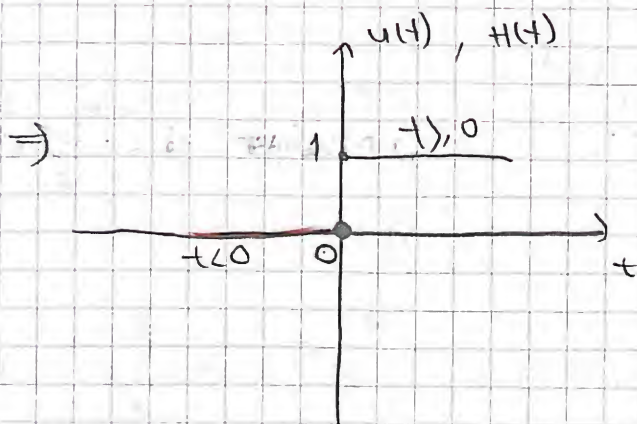
10) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[t^x] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$

$$n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

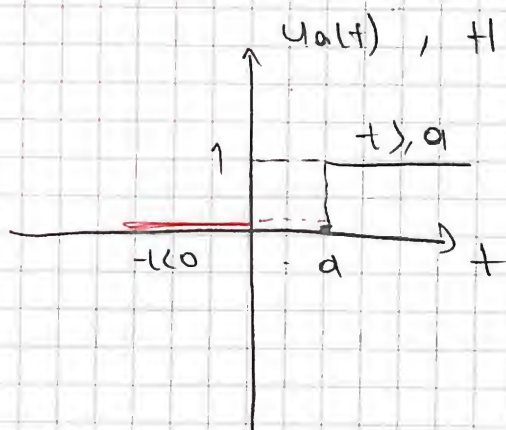
Birim basamaklı Fonksiyon veya Heaviside Fonksiyon

$$u(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



öteleme:

$$u_a(t) = u(t-a) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$



$$11) \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$12) \mathcal{L}[u_a(t)] = \mathcal{L}[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$13) F(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)}, & t \geq 5 \\ 0, & t < 5 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ H(t-5)}}{u(t-5)}$$

$$13) \mathcal{L}[F(t)] = f(s), \quad a > 0$$

$$\mathcal{L}[u_a(t) \cdot F(t-a)] = e^{-as} f(s)$$

$$\text{ör} \quad H(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 4 \\ 5, & t \geq 4 \end{cases}$$

Kismi

$$\begin{aligned} u &= t & du &= dt \\ u &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[H(t)] = ? \quad \mathcal{L}[H(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot H(t) dt = \int_0^4 e^{-st} \cdot t dt + \int_4^{\infty} e^{-st} \cdot 5 dt$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[H(t)] &= -\frac{1}{5} e^{-st} \Big|_0^u + \frac{1}{5} \int_0^u e^{-st} dt - \frac{5}{3} e^{-st} \Big|_u^\infty \\
 &= -\frac{4}{5} e^{-us} + 0 \cdot \frac{1}{5} e^{-s \cdot 0} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^u - \frac{5}{3} (e^{-s \cdot \infty} - e^{-us}) \\
 &= -\frac{4}{5} e^{-us} - \frac{1}{s^2} e^{-us} + \frac{1}{s^2} e^{-0 \cdot s} + \frac{5}{3} e^{-us} \\
 &= e^{-us} \left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{s^2} + \frac{5}{3} \right) + \frac{1}{s^2} = h(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \mathcal{L}[\sin^2 at] &= \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos 2at}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[1] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2at] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + (2a)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \mathcal{L}[\cos^2 at] &= \mathcal{L}\left[\frac{1 + \cos 2at}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[1] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2at] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + (2a)^2}
 \end{aligned}$$

$$16) \mathcal{L}[\sinh at] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right]$$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$17) \mathcal{L}[\cosh t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}[e^{at}] + \mathcal{L}[e^{-at}] \right]$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$18) \mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(\tau) d\tau,$$

$f(s)$ de $s \rightarrow \tau$ iah $f(\tau)$

$$\text{OR } \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right] = ? , F(t) = 1 - \cos t$$

$$\mathcal{L}[1 - \cos t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos t]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} = f(s) \rightarrow f(\tau) = \frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right] = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2 + 1}\right) d\tau$$

$$= \ln \tau - \frac{1}{2} \ln(\tau^2 + 1) \Big|_s^\infty$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) - \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$= \ln \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s} \right) = \ln \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty^2}}} \right) + \ln \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s}$$

0

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right] = \ln \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s}$$

$$19) \mathcal{L}[t^{-1/2}] = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$$

$$20) \mathcal{L}[F(t)] = f(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t F(t) dt\right] = \frac{f(s)}{s}$$

15/12/2010

Ters Laplace Dönüşümleri

$$F(t), \quad \mathcal{L}[F(t)] = f(s)$$

$F(s)$, $F(t)$ 'yi hesaplayalım. $F(t)$ 'yi bulma işlemine ters laplace dönüşümü denir.

$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = F(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}[F(t)] = f(s)$ şeklinde ifade edilir.

" \mathcal{L}^{-1} " \rightarrow ters laplace operatörü

1) \mathcal{L}^{-1} lineer

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[f_1(s) \mp f_2(s) \mp \dots] &= \mathcal{L}^{-1}[f_1(s)] \mp \mathcal{L}^{-1}[f_2(s)] \mp \dots \\ &= F_1(t) \mp F_2(t) \mp \dots \end{aligned}$$

$$2) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s}\right] = k, \quad \mathcal{L}[k] = \frac{k}{s} \text{ idi}$$

$$3) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}, \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \text{ idi}$$

$$4) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at, \quad \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2} \text{ idi}$$

$$?) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{n+1}} \right] = \frac{t^n}{n!}, \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ idi}$$

$$?) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2 - a^2} \right] = \sinh at, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \text{ idi}$$

Ters Laplace hesabı için başka durumlar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s-4}{s^2+9} \right] &= 3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+9} \right] - \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s^2+9} \right] \\ &= 3 \cos 3t - \frac{4}{3} \sin 3t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{4s^2+1} \right] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+(\frac{1}{2})^2} \right] + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+(\frac{1}{2})^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} t \end{aligned}$$

ör

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\sqrt{s}-2)^3}{s^4} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{3/2} - 6s^{1/2} + 12s^{-1/2} - 8}{s^4} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{5/2}} \right] - 6 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2}} \right]$$

$$+ 12 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{7/2}} \right] - 8 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{5/2}} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2+1}} \right] - 6 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{2+1}} \right] + 12 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{5/2+1}} \right] - 8 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{3/2+1}} \right]$$

$$= \frac{t^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} - 6 \frac{t^2}{2!} + 12 \frac{t^{5/2}}{\Gamma(\frac{5}{2}+1)} - 8 \frac{t^{3/2}}{3!}$$

$$\left(\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathcal{L}[t^x] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \text{ idi} \right)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{4 \cdot t^{3n}}{3\sqrt{3}} - 3t^2 + \frac{12 \cdot 8}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{4}{3} t^3$$

Başka Hesaplama Şekli

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2+s-2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s+2)}\right] = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+2}$$

$$s+3 \equiv (a+b)s + 2a - b$$

$$a+b=1 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

$$2a-b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \frac{4}{3} e^t - \frac{1}{3} e^{-2t}$$

$$\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$$z = a + ib$$

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2}$$

or

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + a^2} \right] = ?$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-i)(s+i)} \right]$$

$$\frac{1}{(s-i)(s+i)} \equiv \frac{a}{s-i} + \frac{b}{s+i}$$

$$0 \cdot s + (1+0i) = 1+0 \cdot i = 1 \equiv (a+b)s + i(a-b)$$

$$a+b=0$$

$$i(a-b)=1$$

$$a+b=0$$

$$a-b=-i$$

$$a = -\frac{i}{2}$$

$$b = \frac{i}{2}$$

$$= -\frac{i}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-i} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+i} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} e^{it} + \frac{i}{2} e^{-it}$$

$$= -i \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2} \right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$$

Bir Başka Hesaplama Yolu

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-a_1)^n \cdot (s+a_2)^m \cdot \underbrace{(s-ia_3)^p (s+ia_3)^p}_{(s^2+a_3^2)^p}}$$

$$, n, m, p \in \mathbb{Z}^+$$

$$a_{-1} = \lim_{s \rightarrow a_1} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s-a_1)^n e^{st} f(s) \right]$$

$$a_{-2} = \lim_{s \rightarrow -a_2} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s+a_2)^m \cdot e^{st} f(s) \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = ?$$

$$a_{-31} = \lim_{s \rightarrow ia_3} \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \left[(s-ia_3)^p \cdot e^{st} f(s) \right]$$

$$a_{-32} = \lim_{s \rightarrow -ia_3} \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \left[(s+ia_3)^p \cdot e^{st} f(s) \right]$$

sonuç olarak

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = a_{-1} + a_{-2} + a_{-31} + a_{-32} + \dots$$

OR

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-i)(s+i)} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow i} \left(\cancel{(s-i)} e^{st} \frac{1}{\cancel{(s-i)}(s+i)} \right)$$

$$+ \lim_{s \rightarrow -i} \left(\cancel{(s+i)} e^{st} \frac{1}{(s-i)\cancel{(s+i)}} \right)$$

$$= \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = \underline{\sin t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^{20}}\right] &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(20+1)!} \frac{d^{19}}{ds^{19}} \left[(s-1)^{20} \cdot e^{st} \frac{1}{(s-1)^{20}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{t^{19}}{19!} e^{st} \\ &= \frac{1}{19!} t^{19} e^t\end{aligned}$$

Laplace Dönüşümü Yardımı ile Dif. Denklemlerin Çözümleri

Sabit Katsayılı Denklemlerin Çözümü

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$$

$$\mathcal{L}[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - s F^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{x+1}}\right] = \frac{t^x}{\Gamma(x+1)}$$

ör

$$y' = y'(x), \quad y = y(t), \quad x = x(t), \quad w = w(x), \quad w = w(t)$$

olmak üzere

$$y' - 2y = e^{st}, \quad y(0) = 3 \quad \text{şart altında çözelim.}$$

Önce verilen denklemin 2 yanının Laplace'sı alınır.

Verilmiş ise ilk şartlar kullanılır. Düzenlenerek

$g(s) = \dots$ çözülür. Sonra da ters Laplace ile

$$\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\dots] = \dots$$

çözüm bu olur. Buna göre

$$\mathcal{L}[y' - 2y] = \mathcal{L}[e^{5t}]$$

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-5}, \quad \mathcal{L}[y(t)] = y(s)$$

$$sy(s) - \overset{3}{y(0)} - 2y(s) = \frac{1}{s-5} \Rightarrow (s-2)y(s) = 3 + \frac{1}{s-5}$$

$$y(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s-5)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s-5)}\right]$$

$$y(t) = 3e^{2t} + \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{e^{st}}{s-5} \right) + \lim_{s \rightarrow 5} \left(\frac{e^{st}}{s-2} \right)$$

$$y(t) = 3e^{2t} - \frac{e^{2t}}{3} + \frac{e^{5t}}{3}$$

$$y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{e^{5t}}{3}$$

~~bp~~
$$x'' + 2x' + x = 3te^{-t}, \quad x = x(t)$$

$$x(0) = 4, \quad x'(0) = 2$$

$$s^2 x(s) - \overset{4}{s}x(0) - \overset{2}{x'(0)} + 2(sx(s) - \underset{4}{x(0)}) + x(s) = 3(-1) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\left(\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s), \quad \mathcal{L}[f(t)] = f(s) \right)$$

$$(s^2 + 2s + 1)x(s) = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s + 10 \Rightarrow$$

↓
(s+1)²

$$\rightarrow x(s) = \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{4s+10}{(s+1)^2}$$

$$\rightarrow x(t) = 3 \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{ds^3} (e^{st}) + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (e^{st} (4s+10))$$

$$x(t) = 3 \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{3!} + 3e^{st} + \lim_{s \rightarrow -1} (te^{st} (4s+10) + 4e^{st})$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{2} e^{-t} + 6t e^{-t} + 4e^{-t} = \boxed{x(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 6t + 4\right) e^{-t}}$$

16/12/2010

OR

$$w'' + 2w' + w = x, \quad x(0) = -3, \quad w(1) = -1$$

$$\left(\begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right) s^2 w(s) - s w(0) - w'(0) + 2(s w(s) - w(0)) + w(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{(s+1)^2} w(s) = \frac{1}{s^2} - 3s + c - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{w(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{c-3s-6}{(s+1)^2}}$$

↓
L⁻¹ ile

$$w(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{sx}}{(s+1)^2} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{sx}}{s^2} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} (e^{sx} (c-3s-6))$$

$$w(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{x e^{sx} (s+1)^2 - 2(s+1) e^{sx}}{(s+1)^4} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{x e^{sx} - 2s e^{sx}}{s^4} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} (x e^{sx} (c-3s-6) - 2e^{sx})$$

$$W(x) = x-2 + xe^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x}(c-3) - 3e^{-x}$$

$$W(x) = x-2 + [x+2+x(c-3)-3]e^{-x}$$

$$\Rightarrow W(x) = x-2 + [x-1 + x(c-3)]e^{-x}$$

$$W(1) = -1 \text{ iwn}$$

$$\hookrightarrow W(1) = -1 = -1 + (c-3)e^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$(c-3)e^{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{c=3} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow W(x) = x-2 + (x-1)e^{-x}$$

~~OP~~ $y'' - y' - 2y = 1, \quad y = y(t)$

$$\hookrightarrow s^2 y(s) - \underbrace{s y(0)}_{C_1} - \underbrace{y'(0)}_{C_2} - (s y(s) - \underbrace{y(0)}_{C_3}) + 2y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{(s^2 - s - 2)y(s)}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s} + C_1 s + C_2 - C_1$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-2)} + \frac{C_1 s + C_2 - C_1}{(s+1)(s-2)}$$

$\hookrightarrow \mathcal{L}^{-1}$ ile

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{e^{st}}{s(s-2)} \right) + \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{e^{st}}{s(s+1)} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{e^{st}(C_1 s + C_2 - C_1)}{s-2} \right)$$

$$+ \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{e^{st}(C_1 s + C_2 - C_1)}{s+1} \right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}(c_2 - 2c_1) + \frac{1}{3}e^{2t}(c_1 + c_2)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1 - (c_2 - 2c_1))e^{-t} + \frac{1}{6}(1 + c_1 + c_2)e^{2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 + 2c_1 - c_2)e^{-t} + \frac{1}{3}(1 + c_1 + c_2)e^{2t} - \frac{1}{2}$$

g.s

 c_1, c_2

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{da} = y = a$$

$$y' = 0$$

$$y'' = 0$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$-2a \equiv 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

22/12/2010

2. Arasınay Cevapları (18.12.2010)

$$1) y' - \frac{y}{x} = 2e^{\frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = u$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u - u = 2e^u$$

$$e^{-u} du = \frac{2dx}{x}$$

$$-e^{-u} = 2\ln|x| + C$$

$$\boxed{-e^{-\frac{y}{x}} = 2\ln|x| + C}$$

$$2) x^2 y dx + (x^3 - 1) dy = 0$$

$$P_y = \frac{y^2 - 2x^2}{-x^2 y} = \frac{2}{y} \rightarrow \lambda = y^2$$

$$x^2 y^3 dx + (x^3 y^2 - y^3) dy = 0 \text{ (Tam)}$$

$$u = \int x^2 y^3 dx + h(y)$$

$$u = \frac{x^3 y^3}{3} + h(y)$$

$$u_y = x^3 y^2 + h'(y) = x^3 y^2 - y^3$$

$$h'(y) = -y^3$$

$$h(y) = -\frac{y^4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^3 y^3}{3} - \frac{y^4}{4} = C}$$

$$3) y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

$$y_{h.g.c.} = y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + \underbrace{c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x}}_0$$

$$y'' = \dots \underbrace{-c_1' e^{-x} + c_2' e^{-x} - c_2' x e^{-x}}_{e^{-x} \ln x}$$

$$\begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ -c_1' + c_2' - c_2' x = \ln x \end{cases} \Rightarrow c_2' = \ln x$$

$$C_2 = x \ln x - x + d_2$$

$$c_1' = -x \ln x \rightarrow c_1 = \int x \ln x dx$$

$$C_1 = -\frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} + d_1$$

$$C_1 = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + d_1$$

$$\left(\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ x dx = du \\ \frac{x^2}{2} = u \end{array} \right)$$

$$y = e^{-x} \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + d_1 \right) + x e^{-x} (x \ln x - x + d_2)$$

4) $y'' + ty' = 0$, $t=0$ adi nok.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

 \Rightarrow

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + n a_n \right] t^n = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{-n a_n}{(n+1)(n+2)}} \quad a_0, a_1 \text{ keyfi}$$

Giftler

$$a_2 = \frac{-0 \cdot a_0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$a_4 = 0$$

...

$$a_{2n} = 0$$

Tekiler

$$a_3 = -\frac{1a_1}{2 \cdot 3}$$

$$a_5 = -\frac{3a_3}{4 \cdot 5}$$

$$a_7 = -\frac{5a_5}{6 \cdot 7}$$

$$a_{2n+1} = \frac{-(2n-1)a_{2n-1}}{(2n)(2n+1)}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)a_1}{(2n+1)!} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$y = a_0 + a_1 \left(t - \frac{1t^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot t^5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t^7}{7!} + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right)$$

$$\begin{cases} -x + Dy = 0 \\ Dx + Dy = e^t \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -1 & D \\ D & D \end{vmatrix} = -D^2 - D$$

Kolaylık var

$$Dy = -(D^2 + D)y(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ D & e^t \end{vmatrix} = -e^t$$

$$(D^2 + D)y(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$y_{\text{ö.c.}} = y = ae^t$$

$$y' = ae^t$$

$$y'' = ae^t$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t$$

→ Sistemin çözümü

$$-x + Dy = a \text{ dan}$$

$$x = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t$$

$$c) y'' - y = -t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

$$s^2 y(s) - \underset{\downarrow 0}{s y(0)} - \underset{\downarrow -1}{y'(0)} - y(s) = -\frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - 1)y(s) = -\frac{1}{s^2} - 1$$

$$y(s) = -\frac{1}{s^2(s-1)(s+1)} - \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$y(t) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s^2 - 1} \right) - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{e^{st}}{s^2(s+1)} - \lim_{s \rightarrow -1} \frac{e^{st}}{s^2(s-1)} - \underbrace{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2t} \right)}_{\text{ShT}}$$

$$y(t) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{t \cdot e^{st}(s^2 - 1) - 2s e^{st}}{(s^2 - 1)^2} - \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2}$$

$$y(t) = t - e^t + e^{-t}$$

Laplace Döğiken Katsayılara Uygulanış

ÖR

$$y'' + ty' - 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\rightarrow s^2 y(s) - s \overset{\rightarrow 0}{y(0)} - \overset{\rightarrow 0}{y'(0)} + (-1) \frac{d}{ds} (s y(s) - \overset{\rightarrow 0}{y(0)}) - 2y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\left(\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds} (f(s)) \right)$$

Kuralından

$$s^2 y(s) - y(s) - s \frac{dy(s)}{ds} - 2y(s) = \frac{1}{s}$$

$$-s \frac{dy(s)}{ds} + (s^2 - 3)y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{dy(s)}{ds} + \left(\frac{3}{s} - s \right) y(s) = -\frac{1}{s^2} \quad (\text{Linear})$$

$$\rightarrow \lambda = e^{\int \left(\frac{3}{s} - s \right) ds}$$

$$= e^{3 \ln s - \frac{s^2}{2}}$$

$$= s^3 e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} y(s) = - \int \frac{1}{s^2} s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} ds + c \rightarrow 0 \text{ alınmalıydı}$$

$$= e^{-\frac{s^2}{2}} + c$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3} e^{\frac{s^2}{2}}$$

NOT: (Teorem: $\lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = 0$ dir.)

Teo. göre: $\lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3} e^{\frac{s^2}{2}} \right) = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3 \rightarrow \infty} + c \frac{e^{\frac{s^2}{2}} \rightarrow \infty}{s^3 \rightarrow \infty} = 0 \text{ olmalıdır}$$

$c \infty$

$\Rightarrow c=0$ alınmalıydı

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s^3} \text{ olur}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}^{-1} \text{ ile } \boxed{y(t) = \frac{t^2}{2!}}$$

ÖR

$$ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$-\frac{d}{ds} \left(s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) \right) + y(s) = 0$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 1$

$$-2sy(s) - s^2 \frac{dy(s)}{ds} + y(s) = 0$$

$$-s^2 \frac{dy(s)}{ds} + (1-2s)y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy(s)}{ds} + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} \right) y(s) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{dy(s)}{y(s)} = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \right) ds$$

$$\ln y(s) = -\frac{1}{s} - 2 \ln s + \ln c$$

$$\hookrightarrow y(s) = \frac{c}{s^2} e^{-\frac{1}{s}}$$

Teo. göre

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = c \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2 e^{\frac{1}{s}}} = 0 \text{ olmad\i{}}$$

$$= c \frac{1}{\underbrace{s^2}_{\rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{1}{s}}}_{\rightarrow 1}}$$

$$= \frac{c}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Teo.} \checkmark \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \text{ için Teo. sağlanmıyor.}$$

NOT!!: $\forall c \in \mathbb{R}$ için teoremin sağlanması durumunda c 'nin karşısındaki bulunan üstelli ifade ($e^{-\frac{1}{s}}$) Maclaurin serisine açılır.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{s} \text{ olarak}$$

$$y(s) = \frac{c}{s^2} \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{s^n} + \dots \right)$$

$$y(s) c \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{s^{n+2}} + \dots \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \text{ ile } y(t) = c \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!} \frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!} \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right)$$

$y(0) = 0$
 $y'(0) = 1$

için \Rightarrow

$y(0) = c \cdot 0 = 0 \checkmark$
 $y'(t) = c(1 - (t^2 \text{ terimleri})) \rightarrow y'(0) = c \cdot 1 = 1$
 $c = 1$

~~OR~~

$$-y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0$$

$$\hookrightarrow -\frac{d}{ds} (s^2 y(s) - s y(0) - y'(0)) + 2(s y(s) - y(0)) - y'(0) - \frac{d}{ds} y(s) = 0$$

$$-2sy(s) - s^2 \frac{dy(s)}{ds} + 1 + 2sy(s) - 2 - \frac{dy(s)}{ds} = 0$$

$$-(s^2+1) \frac{dy(s)}{ds} = 1 \rightarrow dy(s) = \left(\frac{-1}{s^2+1} \right) ds$$

$$y(s) = -\arctan s + c$$

Teo. Göre

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (-\arctan s + c) = 0 \quad \text{almost}$$

$$= - \underbrace{\arctan \infty}_{\frac{\pi}{2}} + c = 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} + C = 0$$

↳ $c = \frac{\pi}{2}$ dir

$$\Rightarrow y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow y(s) = \arctan \frac{1}{s}$$

$$Y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\left(\mathcal{L} \left[\frac{F(t)}{t} \right] = \int_s^\infty f(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L}[F(t)] = f(s) \right)$$

$$\left(\mathcal{L} \left[\frac{\sin at}{t} \right] = \arctan \frac{a}{s} \text{ idr} \right)$$

OP

$$y'' - ty' + y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + \frac{d}{ds} (s y(s) - y(0)) + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 y(s) - s - 2 + y(s) + s \frac{dy(s)}{ds} + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s \frac{dy(s)}{ds} + (s^2 + 2) y(s) = \frac{1}{s} + s + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dy(s)}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right) y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1 \quad (\text{Linear})$$

$$\lambda = e^{\int (s + \frac{2}{s}) ds} = e^{\frac{s^2}{2} + 2 \ln s} = s^2 e^{\frac{s^2}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow s^2 e^{\frac{s^2}{2}} y(s) = \int s^2 e^{\frac{s^2}{2}} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1 \right) ds$$

172

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Teo. Göre

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_0 + \underbrace{\frac{2}{s^2}}_0 + \underbrace{\frac{c}{s^2} \frac{1}{e^{\frac{s^2}{2}}}}_0 = 0 \quad \text{olmal, } \forall c \in \mathbb{R} \text{ için}$$

Teo. V'dır.

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8} - \dots \right)$$

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} - c \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{8} + \dots \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \text{ ile } \Rightarrow y(t) = 1 + (c+2)t - \mathcal{L}^{-1} \left\{ c \left[\frac{1}{2} - \frac{s^2}{8} + \dots \right] \right\}$$

Ö. olur.

Not: Bu durum için $\mathcal{L}^{-1}[s^k] = 0$ 'dır. ($k=0, 1, 2, \dots$) \Rightarrow Bu yüzden

$$y(t) = 1 + (c+2)t \quad \text{olur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array} \right\} \text{ için } \Rightarrow y(0) = 1 + 0 = 1 \quad \checkmark$$

$$y'(t) = c+2$$

$$y'(0) = c+2 = 2$$

\downarrow

$c = 0$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + 2t$$

ODEV:

$$1) y'' + 3ty' - 6y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (y(t) = \frac{t^2}{2!})$$

$$2) ty'' + (3-t)y' - 2y = t-1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{3} \quad (y(t) = -\frac{t}{3})$$

$$3) y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (y(t) = t)$$

$$4) ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad (y(t) = e^{2t})$$

$$5) ty'' + (t-1)y' - y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\infty) = 0, \quad (y = 5e^{-t})$$

$$6) ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$7) y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

$$8) y'' + y = e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$9) y'' + 2y = 3t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$10) y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = -2$$

Integral Denklemlerine Uygulama

ör

$$y' + 2y - 3 \int_0^t y dt = 5t + 5, \quad y(0) = 2$$

$$\left(\mathcal{L}[F(t)] f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t F(t) dt\right] = \frac{f(s)}{s} \text{ idi} \right)$$

$$s y(s) - y(0) + 2 y(s) - 3 \frac{y(s)}{s} = \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s}$$

$$\Rightarrow s^2 y(s) - 2s + 2s y(s) - 3 y(s) = \frac{5}{s} + 5$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s - 3) y(s) = \frac{5}{s} + 2s + 5 \Rightarrow \frac{5}{s(s-1)(s+3)} + \frac{2s+5}{(s-1)(s+3)}$$

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5e^{st}}{(s-1)(s+3)} + \lim_{s \rightarrow 1} \frac{5e^{st}}{s(s+3)} + \lim_{s \rightarrow -3} + \lim_{s \rightarrow 1} \frac{e^{st}(2s+5)}{s+3}$$

$$+ \lim_{s \rightarrow -3} \frac{e^{st}(2s+5)}{s-1}$$

$$y(t) = -\frac{5}{3} + \frac{5}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t} + \frac{7}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-st}$$

$$y(t) = -\frac{5}{3} + 2e^t + \frac{2}{3} e^{-3t}$$

Sistemlere Uygulanış

ör

$$\begin{cases} x' - 2x + 3y = 0 \\ 2x + y' - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Sistemin her bir denkleminin 2 yanının Laplace'i alınır. Verilmişse ilk şartlar kullanılır. Sonra sistem $x(s), y(s), z(s), \dots$ vb bilinmeyenlerne göre yeniden sistem düzenlenir. Sonra sözkonusu bu sistemden $x(s), y(s), z(s)$ bulunur. Bunların ters Laplace'isi alınarak çözüme ulaşıılır.

$$\begin{cases} \overset{\rightarrow 2}{s}x(s) - x(0) - 2x(s) + 3y(s) = 0 \\ 2x(s) + \underset{\downarrow 3}{s}y(s) - y(0) - y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-2)x(s) + 3y(s) = 8 \\ 2x(s) + (s-1)y(s) = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} = s^2 - 3s + 2 - 6 \\ = s^2 - 3s - 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 4 \end{matrix}$$

$$\Delta y(s) = (s+1)(s-4)x(s) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix} = 8s - 17$$

$$X(s) = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

$$x(t) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{e^{st}(8s-17)}{s-4} + \lim_{s \rightarrow 4} \frac{e^{st}(8s-17)}{s+1}$$

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$\Delta y(s) = (s+1)(s-1)y(s) = \begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3s-22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{e^{st}(3s-22)}{s-4} + \lim_{s \rightarrow 4} \frac{e^{st}(3s-22)}{s+1}$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

~~OR~~

$$\left. \begin{aligned} x' + 4x + y &= e^t \\ -x + y' + y &= e^t \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{C_1} sx(s) - x(0) + x(s) + y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\xrightarrow{C_2} -x(s) + sy(s) - y(0) + y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\left. \begin{aligned} (s+1)x(s) + y(s) &= C_1 + \frac{1}{s-1} \\ -x(s) + (s+1)y(s) &= C_2 + \frac{1}{s-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + 2s + 1 + 1$$

$$= \underline{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Delta X(s) = (s+1+i)(s+1-i) X(s) = \begin{vmatrix} c_1 + \frac{1}{s-1} & 1 \\ c_2 + \frac{1}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 s + c_1 + \frac{s}{s-1} + \frac{1}{s-1} - c_2 - \frac{1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{c_1 s + c_1}{(s+1+i)(s+1-i)} + \frac{s}{(s-1)(s+1+i)(s+1-i)} - \frac{c_2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

$$x(t) = \text{-----} \text{ bul}$$

$$y(s) = (s+1+i)(s+1-i) y(s) = \begin{vmatrix} s+1 & c_1 + \frac{1}{s-1} \\ -1 & c_2 + \frac{1}{s-1} \end{vmatrix}$$

$$= c_2 s + c_2 + \frac{s}{s-1} + \frac{1}{s-1} + c_1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{2}{s-1}$$

$$\frac{s+2}{s-1}$$

$$y(s) = \frac{c_2 s + c_2}{(s+1+i)(s+1-i)} + \frac{s+2}{(s-1)(s+1+i)(s+1-i)}$$

$$y(t) = \text{-----} \text{ bul}$$

178 Parçali Sistemlere Uygulanış

11
02

$$y'' + y = \begin{cases} 2 & , 0 < t < 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}, y(0) = y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} s^2 y(s) &\rightarrow s y(0) - y'(0) + y(s) = \int_0^1 e^{-st} \cdot 2 dt + \int_1^{\infty} e^{-st} \cdot 0 dt \\ &= -\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s} \end{aligned}$$

$$(s^2 + 1) y(s) = -\frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s}$$

$$y(s) = 2 \left[\frac{4}{s(s^2 + 1)} \cdot e^{-s} + \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right]$$

\mathcal{L}^{-1} ile

$$y(t) = 2 \left\{ -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st} \cdot e^{-s}}{s^2 + 1} - \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st} \cdot e^{-s}}{s(s+i)} - \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st} \cdot e^{-s}}{s(s-i)} \right.$$

$$\left. + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} + \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st}}{s(s+i)} + \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st}}{s(s-i)} \right\}$$

$$y(t) = 2 \left\{ -H(t-1) + \frac{e^{it} \cdot e^{-i}}{2} + \frac{e^{-it} \cdot e^i}{2} + 1 - \frac{e^{it}}{2} - \frac{e^{-it}}{2} \right\}$$

$$y(t) = 2 \left[-H(t-1) + \frac{e^{i(t-1)} + e^{-i(t-1)}}{2} \right]$$

$H(t-1) \cos(t-1)$

$$y(t) = 2 [1 - \cos t - H(t-1) + H(t-1) \cos(t-1)]$$

vega

$$y(s) = 2 \left[\frac{-1}{s(s^2+1)} e^{-s} + \frac{1}{s(s^2+1)} \right]$$

$$\left(\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+1} \right)$$

$$1 = (a+bs^2+cs)$$

$$y(s) = 2 \left[-\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{s}{s^2+1} e^{-s} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \right]$$

$$\begin{pmatrix} a=1 \\ c=0 \\ b=-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \text{ ile } (t(t-1))$$

$$Y(t) = 2 \left\{ -H(t-1) + H(t-1) \cos(t-1) + 1 - \cos t \right\}$$

$$Y(t) = 2 [1 - \cos t - H(t-1) + H(t-1) \cos(t-1)]$$

~~DE~~ $Y'' + 4Y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad Y(0) = 0 \quad Y'(0) = 1$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1 \cdot dt + \int_1^\infty e^{-st} \cdot 0 \cdot dt$$

$$(s^2+4)y(s) - 1 = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{1}{s(s^2+4)} e^{-s}$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+4}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$c = 0$$

$$1 = (a+bs^2+cs)$$

↙ \mathcal{L}^{-1} ile

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{s}{s^2 + 4} e^{-s} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} (1 - \cos 2t) - \frac{1}{4} [H(t-1) - H(t-1) \cos 2(t-1)]$$